ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ

Г.И. НОВИКОВ
К.В. КОЛУЗАНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

ЭКОНОМИКА

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ФАКУЛЬТЕТОВ ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ РУКОВОДЯЩИХ КАДРОВ И СПЕЦИАЛИСТОВ
СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

Г. И. НОВИКОВ,
К. В. КОЛУЗАНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

Допущено Главным управлением высшего и среднего сельскохозяйственного образования Министерства сельского хозяйства СССР в качестве учебного пособия для слушателей факультетов повышения квалификации высших сельскохозяйственных учебных заведений

МОСКВА «КОЛОС» 1975

333
Н 73
УДК 63:51(075.8)

Новиков Г. И. и Колузанов К. В.

Н 73 Применение экономико-математических методов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1975.

288 с. с ил. (Учебники и учеб. пособия для фак. повышения квалификации руководящих кадров и специалистов сельского хоз-ва).

В учебном пособии освещены следующие вопросы: математические методы оптимального программирования, основные экономико-математические задачи внутрихозяйственного планирования, специальные модели и методы, применяемые в сельскохозяйственных расчетах. Наиболее подробно раскрыты: симплексный метод и транспортная задача линейного программирования, экономико-математические модели для оптимизации структуры и размещения посевных площадей, для оптимизации структуры стада скота, сочетание отраслей в хозяйстве, методы сетевого планирования и др.

Н $\frac{40104-107}{035(01)-75}$ 213—75 333

ВВЕДЕНИЕ

В свете выполнения решений XXIV съезда КПСС к уровню экономических исследований, методам планирования и хозяйственного руководства предъявляются повышенные требования. В условиях роста масштабов материального производства, повышения его технической оснащенности и расширения производственных связей только глубокий научный подход к руководству и планированию позволит добиться наивысшей эффективности сельскохозяйственного производства. Сейчас при разработке экономических проблем уже нельзя опираться только на интуицию и практический опыт, и то и другое должно подкрепляться точными, научно обоснованными расчетами.

Советская экономическая наука, имеющая своей основой марксистско-ленинскую политическую экономию, обогащенная опытом социалистического строительства, достигла высокого теоретического уровня, стала составной частью производительных сил и оказывает большую помощь практике. Экономическая наука, концентрируя внимание на теории, методологии и качественном анализе, все больше занимается исследованием количественных закономерностей процессов воспроизводства. Важным условием ее дальнейшего совершенствования является овладение точными методами количественного анализа.

Эффективное применение математических методов и электронно-вычислительных машин (ЭВМ) в сельском хозяйстве связано с использованием довольно сложного математического аппарата. Даже сравнительно простые планово-экономические задачи требуют решения систем уравнений со значительным числом неизвестных. Решение таких задач нельзя осуществить с помощью конторских счетов и арифмометров. Здесь нужны современные ЭВМ. Появление быстродействующих и более устойчивых в работе машин с большой оперативной памятью позволяет совершенно по-новому подходить к постановке экономических задач и к выбору методов их решения.

Известно, что к достижению одной и той же производственной цели при наличии определенных ресурсов и соответствующей нормативной информации можно идти многими путями. Наилучший из них в практике обычно выбирается или на основе мнения экспертов-специалистов, или, в лучшем случае, при помощи сравнения нескольких возможных вариантов. Но ни один экономист не составляет несколько планов. Он составляет один план и при этом не может утверждать, что этот план действительно является наилучшим. Только экономист, вооруженный специальными знаниями в области применения экономико-математических методов и использования электронно-вычислительной техники, может рассчитать наиболее рациональный (оптимальный) план из множества различных вариантов.

Применение математических методов и ЭВМ при планировании сельскохозяйственного производства является весьма необходимым и эффективным, поскольку в этой отрасли часто приходится сталкиваться с проблемой выбора оптимальных вариантов использования производственных ресурсов и выработки оптимальных хозяйственных стратегий.

В перспективе значение экономико-математических методов и ЭВМ в сельском хозяйстве еще более возрастет по мере усиления механизации, электрификации, химизации, автоматизации производственных процессов, создания агропромышленных комплексов, строительства новых мощных птицефабрик, организации откормочных хозяйств, а также создания областных производственно-вычислительных центров. Применение математических методов позволяет углублять и конкретизировать экономические исследования, повышать их научную обоснованность, точность и действенность.

Марксизм-ленинизм с самого начала поставил экономическую теорию на реальную почву точной науки, которая еще при ее зарождении использовала математику. Только на основе марксистско-ленинской теории, на основе правильного и точного качественного анализа социально-экономических явлений и закономерностей можно с успехом применять математические приемы решения экономических задач. Количественные методы не подменяют качественный анализ, а лишь дополняют, конкретизируют и обогащают его. Сейчас задача заключается в том, чтобы специалисты сельского хозяйства изучили и широко применяли на практике точные методы для решения конкретных экономических задач.

Предметом курса является изучение приемов моделирования и экономико-математических методов решения задач в области экономики, организации, анализа, планирования и управления сельскохозяйственного производства.

Основным методом решения указанных задач является экономико-математическое моделирование производственных процессов и применение специального математического аппарата для нахождения оптимальных вариантов развития производства.

Задача курса — освоить приемы постановки и решения экономико-математических сельскохозяйственных задач на разном уровне управления, научиться получать, анализировать и проверять на оптимальность различные варианты решения задач, изучить принципы, приемы и методы моделирования производственных сельскохозяйственных пропорций и процессов с тем, чтобы добиваться на практике наилучших вариантов их развития.

Учебное пособие написано в соответствии с учебным планом и программой подготовки руководящих кадров колхозов и совхозов на факультетах повышения квалификации, утвержденной Главным управлением высшего и среднего сельскохозяйственного образования МСХ СССР 29 октября 1971 г., и предназначено прежде всего для слушателей этих факультетов.

В целях более глубокого изучения курса и увеличения аудитории читателей авторы сочли возможным несколько видоизменить название тем и порядок излагаемых по темам вопросов по сравнению с программой, дополнить программу курса некоторыми темами, имеющими определенное познавательное значение и представляющими практический интерес для руководителей и специалистов сельского хозяйства.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ГЛАВА 1
МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ ПО СЕЛЬСКОМУ ХОЗЯЙСТВУ

§1. Общая характеристика методов математического программирования

Основными признаками, характеризующими любой экономический процесс, являются движение и изменение. С количественной стороны эти признаки следует рассматривать как взаимосвязь нескольких переменных величин. Такое представление об экономических процессах и явлениях приводит к важнейшему в математике понятию связи между переменными величинами — к понятию функциональной зависимости.

Функциональная зависимость в экономике встречается повсюду, начиная с нормы выработки, зависящей от производительности агрегата, и кончая различными балансами по использованию земли, техники, трудовых ресурсов и кормов, где все показатели находятся во взаимной связи. Форма зависимостей может быть самой разнообразной — прямая и обратная, линейная и нелинейная. *Функциональная* зависимость между двумя признаками наблюдается в том случае, когда конкретному значению одного из них соответствует строго определенное (одно) значение другого.

В том случае, когда рассматриваются случайные величины и каждому значению одной из них соответствует неопределенное количество другой, но среднее из этих значений зависит от значений первой величины, зависимость называется *корреляционной.*

Корреляционная зависимость отличается от функциональной тем, что последняя однозначно проявляется в каждом отдельном случае, а первая в среднем для совокупности явлений.

В жизни большинство аграрно-экономических процессов и явлений связаны между собой корреляционными зависимостями. Но для изучения количественных связей в экономических процессах и явлениях более удобной является функциональная зависимость. Поэтому корреляционную зависимость выражают в виде конкретной функции.

Без знания закономерностей количественных зависимостей нельзя осуществлять научно обоснованное планирование, сознательно и целеустремленно направлять экономические процессы для получения желаемых производственных результатов. Поэтому очень важно точно установить количественные экономические зависимости и исследовать их с целью рационального регулирования процессов.

В экономике сельского хозяйства имеется очень много задач из области планирования и экономических расчетов, для решения которых необходимо вскрытие и исследование многофакторных зависимостей и нахождения на этой основе наилучших, то есть оптимальных решений.

С математической точки зрения речь идет об исследовании специального класса задач, в которых отыскивается максимум или минимум некоторой целевой установки (функционала). При этом область существования минимума или максимума ограничена экономическими, агрономическими, зоотехническими или другими условиями, записываемыми в виде уравнений или неравенств.

Подобные задачи давно интересовали специалистов различных отраслей знаний. Возможность использования дифференциального и вариационного исчисления для решения некоторых типов подобных задач (это относится главным образом к статистическим многофакторным задачам, в которых отыскивается экстремальное значение функции от ряда переменных) была известна еще с середины XVIII века. Однако универсальные методы решения таких задач интенсивно начали разрабатываться лишь относительно недавно.

Первые исследования в этой области, ставящие своей целью выбор оптимального плана работы в рамках какого-либо производственного комплекса, относятся к концу 30-х годов и связаны с именем советского ученого-математика академика Л. В. Канторовича, который в 1939 г. по просьбе Всесоюзного фанерного треста решил задачу по наилучшему с точки зрения экономического эффекта распределению пяти видов изделий между 8 станками. Л. В. Канторович разработал наивыгоднейший (оптимальный) вариант загрузки 8 станков, который позволил увеличить выпуск продукции на 5% по сравнению с прежней выработкой. Главное же состояло в том, что советский ученый создал общий математический метод для нахождения оптимальных решений, пригодный для широкого класса различных планово-экономических задач.

В 1939 г. Л. В. Канторович опубликовал книгу «Математические методы организации и планирования производства», в которой рассмотрел широкий круг вопросов, связанных с совершенствованием организации и планирования производства, когда из большого числа различных вариантов требовалось определить оптимальный. С математической точки зрения в этом случае речь идет о так называемых задачах, в которых переменные подчинены линейным связям и ограничениям. В этой же работе был предложен весьма универсальный и эффективный метод решения подобных задач, который вошел в литературу под названием метода разрешающих множителей и был использован для решения общей задачи линейного программирования. Позднее его стали именовать вторым алгоритмом метода последовательного улучшения плана.

Считается, что общая задача линейного программирования впервые была поставлена вскоре после второй мировой войны в 1947 г. Дж. Б. Данцигом, М. Вудом и их сотрудниками в департаменте военно-воздушных сил США. В то время эта группа занималась исследованием возможности использования математических методов для военных задач и проблем планирования.

Классом экстремальных задач зарубежные ученые вплотную заинтересовались еще в 40-х годах. В это время были сформулированы некоторые задачи, связанные с определением экстремума линейной формы, на переменные которой наложены линейные ограничения. В 1941 г. Хичкок впервые сформулировал и решил задачу, являющуюся одним из вариантов транспортной задачи, а в 1945 г. была сформулирована и решена Стиглером задача о диете. Исторически задача диеты Стиглера явилась первой относительно сложной задачей линейного программирования, решенной симплексным методом.

В последнее время во всех развитых странах мира развернулись широкие исследования в области применения математических методов в экономике. Многие ученые-экономисты, математики, кибернетики работают над совершенствованием и созданием новых методов решения планово-экономических задач.

Задача математического программирования формулируется следующим образом. Требуется найти значения n переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют m условиям (уравнениям, неравенствам):

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\leqslant, =, \geqslant\}B_i, \ (i=1, 2, \ldots, m) \quad (1.1)$$

и максимизируют или минимизируют функцию

$$L=f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (1.2)$$

Условия вида (1.1) называются ограничениями, а функция вида (1.2) — целевой функцией.

Предполагается, что функции g_i $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определены, B_i — заданные константы (постоянные величины).

В каждом из ограничений (1.1) сохраняется лишь один из знаков $(\leqslant, =, \geqslant)$, на переменные накладываются условия неотрицательности, а в ряде случаев должны выполняться требования целочисленности, то есть значение каждой переменной должно обязательно равняться целому числу.

Таким образом, предметом математического программирования является исследование и нахождение методов решения экстремальных задач с условиями (1.1) и (1.2). Выбор методов решения таких задач определяется рядом причин и зависит прежде всего от того, в какой математической форме представлены эти условия. Например, если условия представлены в виде линейных соотношений, то задача решается методами линейного программирования.

Следует иметь в виду, что задачи одного типа и даже отдельная задача могут иметь несколько вариантов и методов решения. Однако общим для решения задач математического программирования, как правило, остается принцип последовательного перехода от некоторого отправного допустимого решения к окончательному оптимальному. Достижение оптимального решения осуществляется по принципу постепенного улучшения отправного варианта по заранее разработанному методу расчета (алгоритму).

Класс задач, относящихся к математическому программированию, и количество методов их решения довольно обширны. Поэтому математическое программирование в зависимости от того, в каком виде, в какой математической форме представляются условия (1.1) и (1.2), подразделяется соответственно на линейное и нелинейное программирование.

Задачи линейного программирования связаны прежде всего с вопросами эффективного использования или распределения ограниченных ресурсов для достижения желаемых целей.

Методы *линейного программирования* используются для решения планово-экономических задач, в которых различные количественные зависимости могут быть выражены линейно. Применяемые коэффициенты затрат и выхода продуктов в таких случаях считаются постоянными. В таких задачах линейные отношения выражают уравнениями с переменными первой степени. Примером линейного соотношения является уравнение зависимости валового сбора кукурузы c от размеров площади ее посева x при определенной урожайности, например в 42 ц. Эту зависимость можно выразить уравнением типа $c=42x$.

Здесь переменная c возрастает прямо пропорционально величине переменной x. Если это изобразить графически, откладывая на горизонтальной прямой величину x, а значения переменной c по вертикали, то, поскольку во всех случаях величина c в 42 раза больше переменной x, соответствующие точки расположатся по прямой линии, отсюда и название — линейная зависимость, линейные отношения.

Существует ряд специальных задач, иногда не укладывающихся в схему линейного программирования. Математические модели некоторых из них включают различные нелинейные ограничения. Экономические задачи, условия которых описывают уравнениями с нелинейными зависимостями, решаются методами *нелинейного программирования.*

В большинстве задач с нелинейными зависимостями показатели качества решения, или критерии оптимальности, достигают экстремума выпуклых функций при максимизации и экстремума вогнутых функций при минимизации. В связи с этим методы отыскания максимума выпуклых или минимума вогнутых функций, заданных на выпуклых замкнутых множествах, объединяют в раздел выпуклого программирования.

В практике сельскохозяйственного производства встречаются задачи, которые решаются другими методами нелинейного программирования, но не все они доведены в своей разработке до стадии практического применения. Среди них наиболее разработано квадратичное программирование. Этот метод уже получил практическое применение при решении планово-экономических задач на максимум (минимум) квадратичной функции при линейных ограничениях.

В задачах квадратичного программирования целевая функция может быть записана как сумма линейной и квадратичной форм, например, так:

$$L=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n+d_{11}x_1^2+ d_{12}x_1x_2+\ldots+d_{1n}x_1x_n+\ldots+d_{nn}x_n^2,$$

или в более компактной форме:

$$L=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j. \qquad (1.3)$$

Задачи, в которых наряду с обычными линейными условиями на переменные наложены ограничения, причем все они должны быть целыми числами, относятся к задачам целочисленного линейного программирования. Решение общей задачи линейного программирования в целых числах является на сегодняшний день открытым вопросом.

Математически задача целочисленного линейного программирования ставится так:

найти $L=\Sigma c_jx_j\rightarrow \max\ (\min)$ (1.4)

при условии: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\{\leqslant, =, \geqslant\}B_i\ (i=1, 2, \ldots, m)$ (1.5)

$$x_j\geqslant 0,\ (j=1, 2, \ldots, n) \qquad (1.6)$$

При этом некоторые или все x_j должны быть целыми числами.

Такие задачи возникают тогда, когда, например, необходимо определить оптимальную структуру и состав машинно-тракторного парка, определить оптимальное размещение новых предприятий, ферм и т. п.

Отдельной разновидностью математического программирования является *динамическое программирование.* Его используют при решении планово-экономических задач, в которых анализируемые переменные рассматриваются в динамике, а значения их определяют в зависимости от изменения целевой функции во времени. Описание и методы решения задач нелинейного программирования связаны с рассмотрением общей задачи программирования, математическая модель которой содержит либо нелинейные ограничения, либо нелинейную функцию цели, либо и то и другое одновременно.

Понятие «динамическое программирование» носит двоякий смысл — как раздел математического программирования и как вычислительный метод для решения некоторых типов задач нелинейного программирования. Причем как вычислительный метод оно может быть использовано и для решения таких задач, в которых понятия «время», «временные изменения параметров» отсутствуют.

Как вычислительный метод динамическое программирование связано с именем крупного американского математика Р. Беллмана, создавшего его в начале 50-х годов нашего столетия.

Не вдаваясь в математические аспекты метода, остановимся на экономическом смысле основных задач динамического программирования.

Задача о запасах. Требуется определить оптимальный размер запасов и через какие промежутки времени их осуществлять, чтобы общие затраты на их доставку и хранение были минимальными.

Задача о распределении ресурсов. Имеется n отраслей, заданы функции $g_i(x)$ — доход от вложения в i-ую отрасль $(i=1, 2, \ldots, n)$ некоторой заранее неизвестной величины капитальных вложений (x). Общие капитальные вложения известны. Требуется так распределить капитальные вложения между отраслями, чтобы получить максимальный общий доход.

Задача об оптимальной загрузке транспорта (парохода, самолета, автоколонны, товарного поезда и т. п.). Емкость транспорта составляет W единиц. Перевозится n различных неделимых товаров, веса которых соответственно составляют $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Стоимость единицы i-ого товара ($i=1, 2, \ldots, n$) составляет c_i, выручка от реализаци товара в пункте назначения — $g_i(x)$. Требуется определить, сколько единиц и каких товаров следует погрузить на транспорт, чтобы от последующей реализации товаров достигалась наибольшая выручка.

В основе динамического программирования лежат многошаговые процессы решения. На каждом шаге нужно выбрать какой-то определенный способ действия, который зависит от того, какой способ действия мы выбрали ранее. Если заранее определено, какое действие следует выбрать на каждом шаге, то считается, что в задаче динамического программирования задано поведение, а смысл задачи состоит в том, чтобы выбрать оптимальное поведение с точки зрения какого-то конкретного критерия (максимальный доход, минимальные затраты и т. д.).

Основным принципом в динамическом программировании является принцип оптимальности поведения, который гласит о том, что если мы при решении задач динамического программирования придерживаемся оптимального поведения, то после осуществления некоторых шагов (этапов решения задачи) мы обязаны продолжать придерживаться оптимального поведения, если хотим, чтобы в целом наше поведение (а значит, и решение задачи) было оптимальным.

Нелинейное и динамическое программирование развиты еще недостаточно для того, чтобы ими можно было широко пользоваться в практических расчетах. Сейчас эти методы совершенствуются как в нашей стране, так и за рубежом.

В последние годы интерес специалистов и руководителей сельского хозяйства, научных работников к математическим методам заметно возрос. В экономических расчетах применяются различные математические методы: теория игр, методы шахматного баланса, матричные методы, методы сетевого планирования и другие, которые в той или иной степени относятся к методам программирования.

Деление математических методов на группы и виды, очевидно, не имеет принципиального значения. Гораздо важнее знать и уметь применять эти методы при решении конкретных теоретических и практических задач. Что же касается понятия «математическое программирование», то под ним подразумевается раздел математики[1], занимающийся изучением и разработкой методов решения специального класса задач, в которых отыскивается максимум или минимум некоторой целевой установки, область существования которой ограничена системой уравнений или неравенств.

Наиболее хорошо изученным и распространенным является линейное программирование, которое можно считать относительно законченным разделом математического программирования. Линейное программирование уже получило не только официальное признание в науке, но и достаточно широко применяется на практике при решении различных задач, в том числе и сельскохозяйственных. Линейное программирование исторически развивалось как средство решения планово-экономических задач в целях нахождения путей наиболее эффективного использования имеющихся производственных ресурсов. Поэтому основная сфера применения методов линейного программирования — экономические, аналитические и плановые расчеты. Важность методов линейного программирования состоит еще и в том, что многие задачи нелинейного программирования могут быть сведены к задачам линейного программирования, поскольку нелинейные зависимости можно аппоксимировать линейными, что особенно важно при сложности, малоизученности и недостаточной апробации методов динамического программирования со стороны специалистов самого широкого профиля, в том числе и со стороны специалистов сельского хозяйства.

Достоинства методов линейного программирования — хорошая изученность и математическая строгость; широта применения, позволяющая назвать эти методы универсальными для многих типовых задач; относительная несложность алгоритмов методов; воз-

---

[1] Некоторые ученые считают, что математическое программирование — это отдельная, особая наука. Так, известный польский эконометрик О. Ланге пишет: «Наука о программировании, или теория программирования, есть часть праксиологии. Она представляет собой математическую теорию применения принципа рационального хозяйствования. Как *особая наука* (курсив наш. *Авт.*) теория программирования возникла в конце второй мировой войны...» (О. Ланге. Оптимальные решения. «Прогресс», М., 1967, с. 13).

можность решения многовариантных задач большой размерности (вплоть до нескольких тысяч и десятков тысяч переменных и ограничений) на ЭВМ, поскольку на вычислительных центрах (ВЦ) отлажены стандартные и специальные программы этих методов для ЭВМ; возможность логической и математической проверки и корректировки результатов решения задач; органическая и автоматическая проверка и увязка всех балансовых соотношений исследуемого объекта, что особенно важно для решения плановых задач и, наконец, возможность просчета различных оптимальных вариантов решения задачи по различным критериям оптимальности. Линейное программирование — один из наиболее эффективных приемов экономического анализа хозяйственной деятельности и ценный инструмент совершенствования организации, планирования и управления производством.

В настоящее время существует ряд методов решения задач линейного программирования. Основным из них является *симплексный метод.* Решение системы линейных соотношений этим методом заключается в составлении так называемого опорного, базисного плана. Затем устанавливают, является ли этот план наилучшим из числа возможных. Если это не так, то составляется следующий план, который отличается от предыдущего тем, что в нем рассматриваются объекты планирования в новом соотношении с включением наиболее перспективных переменных (отраслей производства) из числа не включенных в предыдущий план. Полученное решение оценивается вновь, и если оно опять не оказалось наилучшим, то расчеты продолжаются по определенной программе, вплоть до отыскания оптимального решения. Таким образом, при решении экономико-математических задач симплексным методом составляется ряд вариантов решения, постепенно приближающихся к оптимальному.

Кроме названного метода решения задач линейного программирования, существуют следующие методы: разрешающих множителей, распределительный, модифицированный распределительный (Моди), метод потенциалов (он почти полностью совпадает с методом Моди), метод дифференциальных рент и др. Каждый из методов требует особого подхода к подготовке цифровой информации при решении планово-экономических задач и имеет свой алгоритм (свою вычислительную процедуру).

Часто при решении задач методами линейного программирования возникают трудности в определении надежных числовых параметров. Это потребовало разработки таких методов, с помощью которых можно решать задачи с изменяющимися технико-экономическими коэффициентами, коэффициентами линейной формы и свободными членами неравенств. Решение подобных задач — предмет параметрического линейного программирования.

§ 2. Математический и экономический оптимум

С помощью методов линейного программирования могут успешно решаться многие сельскохозяйственные задачи. Как мы уже говорили, применение этих методов целесообразно тогда, когда требуется отыскать наилучшее, оптимальное решение. Отсюда напрашивается другое название для этих методов, а именно «оптимальное программирование», то есть отыскание с помощью определенной программы вычислений наилучшего (оптимального) решения экономической проблемы. Однако этот термин не отражает того, что речь идет именно о методах линейного программирования, а не о методах нелинейного, динамического, стохастического, эврестического программирования. Поэтому в термин «линейное программирование» следует вкладывать не только математическое, но и экономическое содержание. Под методами линейного программирования понимаются программы математических действий, позволяющие находить оптимальное решение различных экономических проблем, условия решения которых выражены в виде линейных уравнений и неравенств и сведены в единую систему линейных соотношений, подчиненную определенной целевой функции. Такое определение отражает как экономическую, так и математическую сущность рассматриваемых методов.

Вся экономическая работа в сельскохозяйственном производстве, по существу, сводится к нахождению оптимальных решений производственных, хозяйственных и экономических проблем. Оценка оптимальности проводится с заранее определенных позиций с учетом оговоренного условия решения. В процессе решения системы линейных уравнений это условие выступает как целевая функция, или, как его еще принято называть, критерий оптимизации. Следовательно, оптимизация является процессом отыскания экстремума целевой функции. Экстремум (от латинского exstremum — крайнее) — предельное значение непрерывной функции $f(x)$, являющееся или максимальным, или минимальным.

В экстремальных задачах ставится цель достигнуть наибольшего (максимума) или наименьшего (минимума) значения функции по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках при заранее установленных условиях, представляющих собой ограничения задачи. Эти ограничения могут быть выражены уравнениями и неравенствами. Решение планово-экономических задач, при котором значение конкретной функции достигло максимума или минимума, называется *оптимальным.*

Если при решении не достигнуто экстремального значения целевой функции, то результат является не оптимальным, а допустимым. Отсюда — неоптимальное решение математической системы означает также неоптимальное решение экономической проблемы. В таком случае можно говорить о допустимом решении экономической проблемы.

Однако не всякое оптимальное математическое решение системы является оптимальным решением экономической проблемы. Оптимальное экономическое решение проблемы может быть достигнуто лишь в том случае, если это решение удовлетворяет всем условиям, которые определяют данную экономическую проблему, то есть все ограничения задачи выполняются.

При выводах об оптимальности решения экономической проблемы очень важно правильно смоделировать экономический процесс, правильно понимать условия, определяющие экономическое решение. Оптимальность решения любой планово-экономической задачи всегда имеет относительный характер. Оно оптимально только с точки зрения ограничений, введенных в задачу, заложенных в ней нормативов и остальной информации, а также тех критериев, которыми оценивается это решение.

Если при решении практической задачи окажется, что ее оптимальное математическое решение не является наилучшим с экономической точки зрения, то это означает, что при решении или математической записи условий либо были допущены ошибки, либо не учитывались какие-то ограничения. Чаще всего математическое оптимальное решение не удовлетворяет биологическим, агротехническим, зоотехническим и техническим требованиям потому, что их трудно, а иногда и вовсе невозможно выразить математическими отношениями.

Правильная постановка задачи и ее решение методами математического программирования дают большой народнохозяйственный эффект и все шире применяются на практике. Переход от решения экономических проблем традиционными методами к решению их методами математического программирования легко понять по небольшому примеру из области планирования сельскохозяйственного производства.

Задача 1.1. Требуется определить оптимальный вариант структуры посева трех культур в бригаде: озимых зерновых, сахарной свеклы фабричной и однолетних трав. Бригада располагает следующими ресурсами: площадь посева — 2000 га, трудовые ресурсы — 12 000 человеко-дней и техника — 2000 машино-смен.

Все показатели, характеризующие нормативы затрат (в расчете на 1 га), а также производственные ресурсы приведены в таблице 1.1. Суть примера не изменится, если в задачу ввести значительно больше сельскохозяйственных культур и производственных ресурсов.

Таблица 1.1

Исходные данные для задачи

Показатели	Культуры			Всего производственных ресурсов
	озимая пшеница	сахарная свекла	однолетние травы	
Затраты пашни (га)	1	1	1	2 000
Затраты труда (человеко-дни)	2	25	0,3	12 000
Затраты техники (машино-смены)	0,5	5	0,1	2 000
Стоимость продукции с 1 га (руб.)	100	500	75	—

Задача поставлена так, чтобы в окончательный план могли войти те культуры, которые позволяют произвести за счет имеющихся производственных ресурсов максимальное количество валовой продукции в стоимоном выражении. Допускается неполное использование производственных ресурсов, если это экономически целесообразно.

Текущее и перспективное планирование сельскохозяйственного производства в своей основе есть составление и взаимоувязывание ряда балансов, таких, как использование земли, трудовых ресурсов, техники и т. п. Насколько правильно составлены и взаимоувязаны все балансы, настолько правильно спланировано производство. При этом можно разработать несколько планов, каждый из которых в различной степени соответствует поставленной цели. Для каждого хозяйства можно составить десяток и более вариантов планов, об эффективности каждого можно судить по установленным экономическим показателям.

Когда такая задача была поставлена перед сотней слушателей курсов повышения квалификации, то почти половина из них предпочли 50% посевной площади засеять сахарной свеклой, чтобы получить максимальное количество продукции в денежном выражении, остальные рекомендовали только 400 га отвести под сахарную свеклу, а 1600 га под озимую пшеницу.

Ни первый, ни второй вариант плана, как мы убедимся позднее, принять нельзя, так как они не являются оптимальными. Можно принять другой план, который является более удачным с точки зрения использования ресурсов и поставленной цели. Под озимую пшеницу нужно отвести 170 га, сахарную свеклу — 200 га и однолетние травы — 1630 га. Теперь составим балансы использования производственных ресурсов. Для удобства представим их в виде уравнений.

1. По пашне: 170 га (озимая пшеница) + 200 га (сахарная свекла) + 1630 га (однолетние травы) = 2000 га. Посевная площадь используется полностью.

2. По труду: $2 \cdot 170 + 25 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot 1630 = 5829$ человеко-дней. Запас труда используется не полностью ($12\,000 - 5829 = 6171$ человеко-день).

3. По технике: $0{,}5 \cdot 170 + 5 \cdot 200 + 0{,}1 \cdot 1630 = 1248$ машино-смен. Не используется 752 машиносмены (2000 — 1248).

Представленный вариант плана может дать такое количество продукции в денежном выражении:

$$170 \cdot 100 + 200 \cdot 500 + 1630 \cdot 75 = 239\,250 \text{ руб.}$$

Приведенный вариант плана является достаточно хорошим, но мы не можем гарантировать, что он является наилучшим из числа возможных вариантов. А таких планов может быть достаточно много.

Теперь составим план с помощью методов линейного программирования. Для этого необходимо экономический процесс или задачу представить в виде линейных уравнений и неравенств. Обозначим культуры через неизвестные переменные. Количество гектаров озимой пшеницы — x_1, сахарной свеклы — x_2 и однолетних трав — x_3. Вначале было оговорено, что производственные ресурсы могут использоваться как полностью, так и не полностью. Это условие математически обозначается знаком $\leqslant$ (меньше или равно). В окончательный план, кроме того, могут войти все культуры или только некоторые из них. Это значит, что каждая неизвестная переменная может быть или равна 0, или больше 0. Математически это условие записывается так:

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0.$$

Запишем ту же систему балансов в виде линейных соотношений:

I. Баланс по пашне (га):

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2000.$$

II. Баланс по труду (чел.-дн.):

$$2x_1 + 25x_2 + 0{,}3x_3 \leqslant 12\,000.$$

III. Баланс по технике (маш.-смены):

$$0{,}5x_1 + 5x_2 + 0{,}1x_3 \leqslant 2000.$$

Основная цель расчета оптимального плана — получение максимума валовой продукции в стоимостном выражении — запишется так:

$$L = 100x_1 + 500x_2 + 75x_3 \longrightarrow \max.$$

Данный пример ясно показывает, как можно перейти от традиционных методов планирования к оптимальному планированию методами линейного программирования. В обычную систему балансов производственных ресурсов вместо известных величин (в данном случае площади посева культур) подставлены значения неизвестных переменных. После такой подстановки система балансов приобретает вид системы линейных соотношений, которая может быть решена с помощью методов линейного программирования. В результате получим конкретные значения переменных величин, при которых достигается оптимальное решение поставленной задачи, в данном случае — максимальное производство продукции в денежном выражении.

В оптимальный план вошли следующие переменные:

$$x_1=0; \ x_2=367{,}4 \text{ га}; \ x_3=1632{,}6 \text{ га}.$$

Озимую пшеницу (x_1) при данных условиях выращивать невыгодно, площадь посева сахарной свеклы составила 367,4 га, а однолетних трав — 1632,6 га.

Всего валовой продукции по оптимальному плану будет произведено на 306 145 руб.:

$$L_{max}=100\cdot 0+367{,}4\cdot 500+1632{,}6\cdot 75=306\,145.$$

Если по первому плану валовой продукции получено 239 250 руб., то по оптимальному плану на 66 895 руб. больше.

Наш пример включает всего три переменные и три ограничения. Но теоретически методы линейного программирования позволяют решать задачи с весьма большим числом переменных и ограничений. Решение зависит только от возможности электронно-вычислительных машин. Если решать задачи вручную, то размерность задач примерно не должна превышать 20 переменных и столько же ограничений, то есть $20n\times 20m$. В настоящее время для сельскохозяйственных предприятий хорошо зарекомендовали задачи размерностью порядка $100n\times 100m$. Они быстро решаются на ЭВМ.

Практически любая система балансов, составляемая при традиционных методах планирования и экономического анализа, может быть сформулирована и записана в виде системы линейных соотношений. Ее решение приведет к нахождению оптимального плана производства. Таким образом, ни количество учитываемых переменных, ни число ограничений не является принципиальным тормозом при переходе от традиционных методов экономического анализа и планирования к методам оптимального решения экономической проблемы посредством методов математического программирования.

§3. Требования к задачам, решаемым методами оптимального программирования

Для того чтобы успешно ставить и решать с помощью методов оптимального программирования различные планово-экономические сельскохозяйственные задачи, необходимо знать требования, которые к ним предъявляются. Основное требование ко всем задачам анализа, планирования и управления — их четкая постановка, поскольку от того, насколько правильно и четко сформулирована задача, зависит и та информация, которая должна использоваться при ее решении, и выбор методов решения, и, конечно, итоговые результаты. В понятие «постановка задачи» входит обязательная строгая формулировка того, что требуется, в какое время, на каком объекте, при каких условиях и с какой целью.

Задача может быть поставлена, например, так.

В результате приобретения и использования совхозом дальнеструйных дождевальных машин типа ДДН-70 хозяйство смогло увеличить площадь полива на 1,4 тыс. га. Совхоз имеет недоиспользуемые трудовые ресурсы в размере 5 тыс. человеко-дней и может дополнительно приобрести 1 тыс. ц минеральных удобрений в пересчете на действующее вещество. Наиболее рентабельным для хозяйства является выращивание озимой пшеницы, проса и гречихи. Прогнозируемый уровень урожайности этих культур, себестоимость центнера зерна, нормы внесения удобрений и трудоемкость культур, приведенные в соответствие с ожидаемой урожайностью, установлены. Известны плановые заготовительные цены на пшеницу, просо и гречиху (табл. 1.2). Требуется найти вариант сочетания посевов этих культур, исходя из имеющихся ресурсов, установленных нормативов затрат и цен реализации продукции, при котором общая масса прибыли для хозяйства на планируемый период была бы максимальной.

В этом случае в задаче конкретно указано, что требуется, когда, где и при каких условиях.

Второе требование для задач, решаемых методами оптимального программирования,— возможность в соответствии с постановкой задачи собрать необходимую информацию, поскольку без соответствующей нормативной базы, объемов имеющихся ресурсов, включая приобретаемые ресурсы на плановый период, никакое математическое решение невозможно. При этом информация должна отвечать соответствующим требованиям, например, быть достоверной, достаточно полной и т. д.

Таблица 1.2

Исходные данные для задачи

Показатели	Культуры		
	озимая пшеница	просо	гречиха
Урожайность (ц/га)	14,0	15,0	13,0
Затраты труда на 1 ц (человеко-дни)	0,4	0,3	0,6
Затраты удобрений на 1 га (ц действующего вещества)	0,4	0,4	0,8
Себестоимость 1 ц (руб.)	5,0	4,5	16,0
Цена реализации 1 ц (руб.)	7,0	6,0	20,0

Третье условие — экономическая задача должна быть сформулирована и поставлена так, чтобы она (то есть все ее условия, включая и целевую функцию) могла быть описана математически, например, с помощью уравнений и неравенств. В противном случае математическое решение ее будет невозможно, а значит, и оптимальной программы получить не удастся.

Четвертое требование — задача должна быть поставлена с таким расчетом, чтобы для ее решения можно было подобрать соответствующий математический аппарат. Иными словами, экономическая задача должна подходить под общую задачу математического программирования, то есть все условия конкретной задачи должны описываться условиями (1.1), а целевая функция — условием (1.2) задачи математического программирования.

Пятое требование — задача должна иметь те пределы своей размерности, которые позволяют ее решать или вручную, или на ЭВМ в производственном вычислительном центре.

И, наконец, последнее, хотя по степени важности оно может быть и первым,— это требование практической, научной или учебной значимости задачи.

Как нетрудно убедиться, приведенная выше задача отвечает всем необходимым требованиям для ее решения с помощью методов оптимального программирования, а это означает, что и сама задача по своей экономической постановке и математическому описанию относится к классу задач оптимального программирования.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЗАДАЧАХ И МЕТОДАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование находит широкое применение в экспериментальных и практических расчетах, в анализе и планировании сельскохозяйственного производства. Несмотря на то, что его методы продолжают совершенствоваться и разрабатываться, линейное программирование относится к одному из наиболее законченных математических разделов.

§ 1. Смысл задачи линейного программирования

В первой главе мы кратко останавливались на сущности, математической форме и экономическом содержании общей задачи математического программирования. Мы констатировали, что самые различные задачи, в том числе и экономического характера, сводятся к решению экстремальных математических задач.

В сельскохозяйственном производстве круг таких задач очень широк. Многие известные отечественные и зарубежные математики и экономисты, специализирующиеся на применении экономико-математических методов в сельскохозяйственном производстве, даже считают, что сельское хозяйство является наиболее перспективной отраслью применения линейного программирования. Они справедливо объясняют это прежде всего тем, что множество экономических задач оптимального использования (распределения) ресурсов в сельском хозяйстве естественно вписывается в рамки моделей линейного программирования, то есть основные допущения (линейность, суммируемость и др.), применяемые при построении моделей линейного программирования, в подавляющем большинстве случаев соответствуют объективно существующим связям сельскохозяйственного производства. Что же касается специфических особенностей сельскохозяйственного производства, таких, как его сезонность, строгая последовательность технологических процессов и т. п., то их можно учесть при разработке соответствующих линейных моделей.

Таким образом, первое и основное условие задач, сводящихся к задачам линейного программирования,— это допущение линейности соотношений — условий задачи. Это условие внутренне присуще большинству расчетов по сельскому хозяйству. Действительно, рассмотрим, например, любой бухгалтерский или плановый баланс, состоящий, как известно, из двух частей: источников поступления средств и путей их расходования. В так называемой приходной части показываются все источники поступления: запасы на начало года, производство, приобретение со стороны и т. п., а в расходной — пути распределения: израсходовано в процессе производства, продано на сторону, сдано государству, заложено в страховой фонд и т. п. Если обозначить приходную часть через x, а расходную через y, то в общем случае соотношение расходной и приходной частей баланса можно выразить посредством равенства или неравенства: $x=y$, или $x>y$, или $x<y$. В первом случае приходная и расходная части полностью сбалансированы, то есть баланс сходится (закрыт). Во втором и третьем случаях баланс не сходится. Причем во втором случае приходная часть больше расходной (сальдо положительное), а в третьем случае — наоборот.

Если мы разложим итоговую приходную и расходную части на их составляющие, то соотношения, естественно, не изменяются. Однако в этом случае как левая, так и правая части будут обозначать некоторый набор, некоторую сумму величин.

Пусть x_1 обозначает запасы на начало года; x_2 — производство; x_3 — приобретение со стороны; y_1 — то, что израсходовано в процессе производства; y_2 — то, что продано; y_3 — то, что сдано государству; y_4 — то, что заложено в страховой фонд. Теперь можно записать, что $x_1+x_2+x_3=$ (или $>$, или $<$) $y_1+y_2+y_3+y_4$. В данном случае мы получили уже более развернутое линейное уравнение или неравенство (в зависимости от знака между его частями).

Аналогичным образом можно составить и записать соотношения по всем остальным производственно-финансовым балансам. Если обозначить все позиции любого баланса, как расходной, так и приходной частей, через n то, при условии, что таких балансов m, у нас получится своеобразная система линейных соотношений размерностью $(m \times n)$.

Теперь представим себе, что нам необходимо составить производственно-финансовый план хозяйства, причем такой, чтобы в результате его практической реализации хозяйство смогло бы иметь наивысшую массу прибыли. Иными словами, необходимо определить, что и в каком количестве хозяйству следует производить, как и каким образом распределить ресурсы (то есть так оптимизировать все балансовые соотношения), чтобы достичь наивысшего эффекта. Такая постановка задачи, имеющая непосредственное практическое значение, может быть формализована в виде системы линейных соотношений, сведена к задаче линейного программирования и решена с помощью одного из методов линейного программирования. Попытаемся данную экономическую задачу свести к математической и записать все ее условия с помощью линейных уравнений и неравенств.

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ множество неизвестных величин производственно-финансового плана, подлежащих определению, а через m — количество всевозможных балансовых соотношений (ограничений на использование земельных угодий, трудовых ресурсов, техники, кормов, удобрений и т. п.).

Наличные ресурсы, то есть все те ресурсы, которые к плановому периоду будут находиться в распоряжении хозяйства, обозначим соответственно через $B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_n$. Иными словами, мы итоговую приходную часть каждого баланса обозначили, через некоторую величину, которую закодировали как B_1, B_2 и т. д.

Поскольку на производство какого-либо продукта всегда затрачиваются некоторые ресурсы, то необходимо ввести общее обозначение для нормативов затрат ресурсов. Обозначим норму затрат первого ресурса на единицу первого продукта через a_{11}, норму затрат первого ресурса на единицу второго продукта через a_{12}, норму затрат второго ресурса на единицу первого продукта через a_{21} и т. п. В общем случае норма затрат i-ого ресурса на единицу j-ого продукта обозначим a_{ij}.

В соответствии с принятыми обозначениями общее условие по затратам ресурсов можно записать так:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant B_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant B_2 \qquad (2.1)$$

. . . .

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n\leqslant Bi$$

. . . .

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n\leqslant B_m$$

Экономически условия, записанные в виде системы (2.1), интерпретируются так: затраты любого из видов ресурса на производство всех видов продуктов не должны превышать объема этого ресурса, имеющегося в хозяйстве на начало планового периода.

При этом естественно допустить, что производство любого продукта не может быть величиной отрицательной, то есть

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n)\geqslant 0. \qquad (2.2)$$

Теперь вернемся к целевой установке данной задачи — достижению максимальной прибыли. Если допустить, что единица первого продукта приносит некоторую величину прибыли, равную c_1, второго продукта — c_2 и т. д., то условие достижения максимальной прибыли (L) можно записать так:

$$L=(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_jx_j+\ldots+c_nx_n)\to\max. \qquad (2.3)$$

Первое, второе и третье условия задачи, объединенные вместе, характеризуют поставленную задачу в ее математической форме. Правда, такая математическая запись не очень удобная, поэтому в соответствии с общей записью задачи математического программирования применяется более компактная форма и задача записывается так:

найти $L=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max$

при условии: 1) $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant B_i,$ (2.4)

2) $x_j\geqslant 0.$

Запись вида (2.4) является структурной моделью общей задачи линейного программирования.

§2. Прямая и двойственная задача линейного программирования

Нам очень часто встречаются противоположные события, одному явлению противостоит другое. Например, жизни противостоит смерть, зиме — лето, ночи — день, сложению — вычитание и т. д.

Любой прямой задаче линейного программирования противостоит двойственная задача, непосредственно вытекающая из первой. Поясним это на простом примере. Пусть поставлена задача — так распределить четыре различных ресурса между двумя возможными способами производства[1] (двумя видами производимой продукции), чтобы расход ресурсов не превысил их объема, а доход хозяйства при этом был бы максимальным.

Математически и экономически данная задача полностью соответствует общей задаче линейного программирования и может быть математически записана в виде (2.4). Если же в условие задачи ввести конкретные нормативы, то она может принять, например, такой вид:

найти $L=7x_1+5x_2 \rightarrow \max$

при условии:

$$\begin{aligned} 1)\ & 2x_1+3x_2 \leqslant 19; \\ & 2x_1+x_2 \leqslant 13; \\ & 3x_2 \leqslant 15; \\ & 3x_1 \leqslant 18; \\ 2)\ & (x_1 \text{ и } x_2) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В результате решения такой задачи определяются конкретные значения x_1 (количество продукции первого вида) и x_2 (количество продукции второго вида), которые позволяют иметь максимальную величину дохода (L). Но представим себе, что при аналогичных условиях задачи перед нами стоит несколько иная цель.

[1] Следует иметь в виду, что в математике нередко употребляются термины, имеющие в экономике совсем иной смысл. Термин «способы производства», широко употребляемый в математическом программировании, не тождествен своему экономическому близнецу. В математическом программировании этот термин употребляется в смысле характеристики возможного варианта производства в отличие от политэкономического смысла «способа производства» (капиталистический и социалистический способ производства).

А именно: требуется оценить стоимость каждого из четырех видов ресурсов, затрачиваемых на производство обоих продуктов, в зависимости от уровня доходов, получаемых в результате применения (использования) четырех видов сырья. При этом, естественно, речь идет не об абсолютной оценке единицы сырья, которая задана и учтена в критерии оптимальности, а об относительной оценке сырья с точки зрения прироста доходов предприятия, если бы оно стало продавать это сырье на сторону. Вот эти-то условные, относительные оценки ресурсов и надо определить.

Обозначим их y_1, y_2, y_3, y_4, где y — условная цена соответствующего i-ого ресурса ($i=1$, 2, 3, 4). Тогда на основании прямой задачи (2.5) можно составить обратную ей задачу (2.6):

найти $L=19y_1+13y_2+15y_3+18y_4 \to \min$

при условии:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & 2y_1+2y_2+3y_4 \geqslant 7; \\
& 3y_1+y_2+3y_3 \geqslant 5; \\
2)\quad & (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4) \geqslant 0.
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$

В задаче (2.6) в качестве критерия оптимальности выступает показатель — минимальная условная общая стоимость сырья. Ибо если наше предприятие реализует неиспользуемые ресурсы, то для государства или другого предприятия важно, чтобы эти ресурсы продавались по объективной, но возможно наименьшей цене.

Что же касается экономического смысла первого условия задачи (2.6), то оно отражает тот факт, что предприятие будет лишь в том случае продавать свои ресурсы, если выручка его от этого в расчете на единицу ресурса превысит тот доход (7 и 5 единиц), который оно имеет в случае использования ресурсов на производство продукта x_1 и x_2 (в прямой задаче).

Второе условие задачи (2.6) отражает тот факт, что цена реализации ресурсов (y_1, y_2, y_3 и y_4), естественно, не может быть отрицательной.

Таким образом задача вида (2.5) называется прямой, а вида (2.6) — двойственной, или обратной.

Мы остановились здесь на рассмотрении прямой и двойственной задачи по ряду причин.

Во-первых, необходимо знать, что любой задаче линейного программирования противостоит обратная (двойственная). Причем если в прямой задаче следует определить максимум некоторой функции, то в двойственной — минимум, и наоборот. Если в прямой задаче в первом условии имеется один вид неравенства, например левая часть неравенств меньше или равна правой части, как в задаче (2.5), то в обратной (двойственной) задаче в соответствующем условии знак неравенства меняется на противоположный.

Во-вторых, обе задачи (как прямая, так и двойственная) могут решаться одним и тем же методом линейного программирования. При этом решение признается полным, если решена и прямая и двойственная задачи. Причем значение результатов решения двойственной задачи с экономической точки зрения ничуть не ниже значения результатов решения прямой задачи.

В дальнейшем при рассмотрении методов решения задач линейного программирования мы, однако, будем рассматривать лишь прямые задачи. Это объясняется тем, что принцип нахождения оптимального варианта как прямой, так и двойственной задачи практически одинаковый. Но следует вместе с тем иметь в виду, что если логический и экономический смысл результатов решения прямой задачи линейного программирования довольно понятен и не вызывает споров, то интерпретация результатов решения двойственной задачи более сложна и не лишена спорных моментов и дискуссии о смысле, роли, значении и практической применимости результатов решения двойственной задачи продолжаются до сих пор.

Необходимо также иметь в виду, что прямая и двойственная задачи могут меняться местами: прямая задача может быть двойственной и, наоборот, двойственная задача может быть прямой, все зависит от конкретной постановки задачи. Большинство математиков и экономистов, однако, придерживаются того мнения, что если в задаче отыскивается наилучший план распределения ресурсов между возможными способами производства, то такая задача называется прямой. Если же отыскиваются условные оценки ресурсов [1], то такая задача относится к двойственной задаче.

---

[1] В литературе такие оценки именуются по-разному. Л. В. Канторович называет их объективно обусловленными оценками (О.О.О.), другие называют их двойственными оценками и т. п.

Весьма часто прямую и двойственную задачи вместе называют взаимно двойственными. Существует специальная (основная) теорема, связывающая взаимно двойственные задачи, которую мы приведем здесь без доказательства и дополнительных пояснений.

Теорема двойственности. Если исходная задача имеет решение, то и двойственная ей задача также имеет решение. При этом минимум формы L (прямой задачи) равен максимуму формы L^* (двойственной задачи) или, наоборот, максимум формы L прямой задачи равен минимуму формы L^* двойственной. И если в исходной задаче линейная форма L (критерий оптимальности) не ограничена снизу (то есть нет таких ресурсов, которые лимитируют производство, что теоретически допустимо, но практически противоестественно), то в двойственной задаче система ограничений не имеет ни одного решения.

Заметим, что с решением прямой и двойственной задач линейного программирования непосредственно связаны вопросы теории и практической реализации оптимального функционирования народного хозяйства и его отраслей, в том числе и вопросы оптимального ценообразования. Поэтому изложенные здесь кратко вопросы имеют большую научную и практическую значимость.

§ 3. Характеристика методов линейного программирования

Методы линейного программирования подразделяются на конечные и итеративные. *Конечные* методы позволяют за определенное (конечное) число однотипных операций (шагов, итераций) найти оптимальное решение. *Итеративные* методы — приближенные методы, хотя и позволяют получать оптимальное решение с достаточно высокой степенью точности.

Среди конечных методов линейного программирования наибольший интерес представляют два: симплексный метод линейного программирования (иначе его называют метод последовательного улучшения плана или метод наилучшего использования ресурсов) и так называемая транспортная задача.

Различное название симплексного метода обязано истории его разработки. Считается, что основы симплексного метода были сформулированы известным американским математиком Дж. Б. Данцигом в 1947 г. Свое название этот метод получил от слова «симплекс», обозначающего простейший выпуклый многогранник в пространстве с числом измерений, равным n. При геометрическом представлении задач линейного программирования искомые величины (переменные) соответствуют отдельным (угловым) точкам на поверхности соответствующего многогранника — симплекса. Поэтому такое название метода в известном смысле обусловлено случайными факторами и не соответствует существу метода [1].

Другое название этого метода — метод последовательного улучшения плана — более соответствует его идее и назначению. История такого названия метода восходит к 1939 г., когда советский математик (ныне академик) Л. В. Канторович впервые разработал один из методов решения задач линейного программирования (метод разрешающих множителей) и применил его для составления оптимального варианта плана при организации производственных процессов [2]. Тем не менее из всех названий этого метода наиболее прижилось название «симплексный», или «симплекс-метод», хотя до сих пор в литературе по-прежнему встречаются все три названия.

Симплексный метод — универсальный метод решения задач линейного программирования. Этим, в частности, и объясняется его значимость. В настоящее время имеется ряд симплексных алгоритмов (от арабского алгоритм — совокупность математических действий для решения конкретной задачи), что в определенной степени затрудняет изучение этого метода. Однако общим для всех модификаций этого метода является его основная идея, содержащая три существенных момента.

Во-первых, сначала по некоторому, обязательно указываемому способу, определяется так называемый опорный план, удовлетворяющий условиям задачи. Во-вторых, устанавливается признак, позволяющий проверить, является ли этот опорный план оптимальным или нет. В-третьих, дается способ, который позволяет перейти от

---

[1] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). «Наука», М., 1969 г., с. 194.

[2] Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Ленинград, 1939.

выбранного неоптимального плана к другому плану[1], более близкому к оптимальному. При этом обязательно доказывается, что таким путем можно через конечное число шагов получить оптимальный план. Таким образом, основная идея метода заключается в последовательном улучшении результатов решения задачи (улучшении плана).

Эти три момента характеризуют и основную идею другого важного метода линейного программирования — транспортной задачи линейного программирования.

Несмотря на универсальность симплексного метода, его применение не всегда рационально. Существует определенный класс задач, решать которые симплексным методом хотя и можно, но нерационально и неудобно. Это так называемый класс распределительных, или транспортных, задач, когда требуется распределить некоторые ресурсы между их потребителями так, чтобы в итоге достигался наивысший экономический эффект. Подобные задачи возникают часто. Например, требуется составить такой план перевозки удобрений от складов до полей, чтобы общие затраты на их перевозку были минимальными. Или требуется так разместить посевы по предшественникам, чтобы валовой сбор урожая был максимальным и т. п.

Первоначально метод решения подобных задач был разработан для определения оптимального распределения грузовых судов, для минимизации протяженности порожних рейсов кораблей при соблюдении некоторых определенных требований относительно перевозок[2]. Применим этот метод и для рационализации перевозок грузов по шоссейным дорогам, воздушным транспортом и по железным дорогам. Ввиду того, что этот метод первоначально был разработан для оптимизации перевозок, он получил название транспортный метод, или транспортная задача. Вскоре, однако, обнаружилось, что многие задачи, отнюдь не транспортного характера,

---

[1] Здесь и далее понятие «план» употребляется несколько в ином смысле, чем это принято в экономике. Под планом в математическом программировании подразумевается один из возможных вариантов решения задачи, под оптимальным планом — наилучший (оптимальный) вариант решения задачи.

[2] Хеди Э., Кандлер У. Методы линейного программирования. М., «Колос», 1965, с. 365.

могут быть формально сведены к транспортной задаче и решены с помощью этого метода. В сельскохозяйственном производстве к таким задачам относятся задачи по распределению машинно-тракторного парка по видам работ, задачи оптимизации поставки техники, строительных материалов, удобрений, задачи по оптимизации размещения посевов, заготовок и т. п.

С математической точки зрения транспортная задача является частным случаем общей задачи линейного программирования, а для ее решения разработан ряд точных и приближенных алгоритмов. Но прежде чем перейти непосредственно к изложению алгоритма симплексного метода и транспортной задачи, рассмотрим, что же представляет задача линейного программирования с геометрической точки зрения, поскольку графическое изображение более простое и наглядное.

§ 4. Геометрический смысл задачи линейного программирования

Для того чтобы понять, что же представляет собой задача линейного программирования с геометрической точки зрения, рассмотрим следующую задачу.

Задача 2.1. При анализе перспективного плана развития хозяйства обнаружилось, что в нем недоиспользуется 200 га пашни. Наиболее эффективными в хозяйстве являются две культуры — просо и гречиха, рентабельность их одинаковая. Хозяйство имеет возможность приобрести сверх плана 800 ц минеральных удобрений (в пересчете на действующее вещество) при условии, что сдаст дополнительно к ранее планируемому объему 1000 ц гречихи.

Требуется так распределить имеющиеся ресурсы[1] между этими культурами, чтобы хозяйство имело от их производства наивысшую прибыль.

Нормативы затрат ресурсов, прибыльность проса и гречихи (в расчете на 1 ц) установлены (табл. 2.1).

Попытка решить данную задачу путем альтернативного решения вопроса «или гречиха, или просо» не приводит к желаемым результатам. Попробуем данную задачу решить графически. Для этого обозначим через

[1] Для упрощения предполагается, что остальные ресурсы не лимитируют производство.

x_1 — объем производства проса (ц), через x_2 — объем производства гречихи (ц). В соответствии с имеющимися нормативами затрат и ресурсами, которые можно использовать хозяйству, составим следующую модель задачи:

$$\begin{aligned} 0{,}07x_1+0{,}05x_2 &\leqslant 200;\\ 0{,}1x_1+0{,}4x_2 &\leqslant 800;\\ x_2 &\geqslant 1000;\\ x_1 &\geqslant 0.\\ L=2x_1+6x_2 &\to \max. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Первое неравенство системы (2.7) отражает тот факт, что площадь пашни, занятая и под просо, и под гречиху, не должна превышать общей посевной площади, отводимой под эти культуры. Второе неравенство характеризует баланс затрат и наличия удобрений, третье — нижний предел производства гречихи, а четвертое — требует, чтобы производство проса было бы не отрицательным, что вполне естественно.

Таблица 2.1

Нормативы затрат и прибыльность проса и гречихи

Показатели	Просо	Гречиха
Затраты пашни (га)	0,07	0,05
Затраты удобрений (ц)	0,1	0,4
Прибыль (руб.)	2,0	6,0

Построим оси координат. На оси абсцисс будем откладывать производство проса — (x_1), на оси ординат — призводство гречихи (x_2). Соответственно на обе оси нанесем масштаб (рис. 1).

Рассмотрим первое неравенство: $0{,}07x_1+0{,}05x_2\leqslant 200$. Разрешим его относительно x_2 (можно и относительно x_1); знак $\leqslant$ мы можем заменить на $=$, поскольку это допускается по условию задачи. Получим $x_2=4000-1{,}4x_1$. Придавая x_1 произвольное значение (в рамках допустимости), получим некоторые значения x_2. Итак, если $x_1=1000$, то $x_2=2600$, а если $x_1=2000$, то $x_2=1200$. С помощью этой несложной операции мы получили две точки A и B с координатами A (1000, 2600), B (2000, 1200). Известно, что через две точки в пространстве можно провести прямую и притом только од-

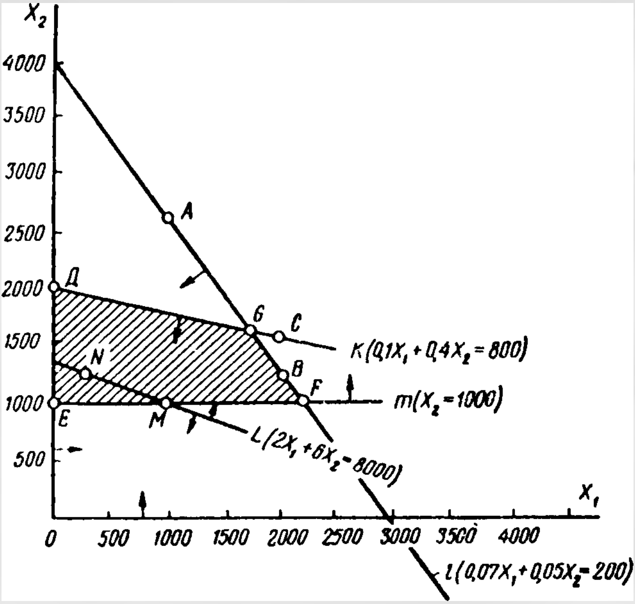


Рис. 1. Графический смысл задачи линейного программирования.

ну. Нанесем эти точки на график и проведем через них прямую l, соответствующую уравнению $0{,}07x_1+0{,}05x_2=200$. Если свободный член 200 этого уравнения сокращать в соответствии с условием задачи, то линии, параллельные l, будут находиться левее ее и в этом отношении проведенная нами линия является предельной, как предельна (максимально допустима) и сама величина (200) площади пашни. На графике направление движения семейства линий при уменьшении площади пашни показано стрелочкой.

Аналогичным образом строим на графике прямую K, соответствующую второму неравенству:

$$0{,}1x_1+0{,}4x_2=800;$$
$$x_1+4x_2=8000;$$
$$x_1=8000-4x_2.$$

При $x_2=1500$; $x_1=2000$, C (2000; 1500);
При $x_2=2000$; $x_1=0$, D (0; 2000).

Поскольку третье неравенство отражает ограниченность объема производства гречихи ($x_2 \geqslant 1000$) снизу (не менее 1000 ц), то строим линию, отвечающую нижнему пределу этого ограничения, то есть соответствующую уравнению $x_2=1000$. Эта прямая проходит параллельно оси $0x_1$ через точку E с координатами (0, 1000). Данная линия (обозначим ее m) лимитирует сочетание гречихи и проса, то есть ограничивает так называемую область допустимых решений так же, как и линия $0x_2$.

Итак, возможное сочетание производства проса и гречихи будет находиться в секторе, ограниченном линиями Ex_2 и EF, причем искомый оптимум может находиться на этих линиях или правее линии $0x_2$ и выше линии EF.

Построив линии, соответствующие уравнениям задачи, и определив направление движения семейства параллельных прямых в соответствии с изменением свободных членов неравенств, найдем область допустимых значений, в которой искомый оптимум возможен. Эта область ограничена линиями: l, K, m, $0x_2$ и на графике представляет собой четырехугольник с вершинами $EFGD$.

Определив область существования возможных сочетаний производства проса и гречихи, перейдем к графическому изображению целевой функции — линии, соответствующей критерию оптимальности:

$$L=2x_1+6x_2 \to \max.$$

Предположим, что хозяйство будет производить только 1000 ц гречихи. В этом случае производство проса будет равно нулю ($x_1=0$), а прибыль от реализации гречихи составит 6000 руб. ($6 \cdot 1000=6000$). Естественно, данная величина будет лишь нижней границей прибыли, поскольку ресурсы позволяют увеличивать производство как гречихи, так и проса.

Допустим, что хозяйство планирует получить, скажем, 8 тыс. руб. прибыли. В этом случае уравнение критерия запишется так:

$$L=2x_1+6x_2=8000.$$

Разрешим его относительно x_1. Для этого поделим предварительно все члены этого уравнения на 2. Получим: $x_1=4000-3x_2$. Придав x_2 значение, равное нижнему пределу производства гречихи (1000 ц), получим, что при $x_2=1000$, $x_1=1000$. На графике такое сочетание образует точку M (1000, 1000). Придав x_2 значение 1200, получим, что $x_1=400$. Тем самым мы нашли вторую точку N, соответствующую прямой $x_1=4000-3x_2$, с координатами (400, 1200). Через точки M и N проводим прямую L.

Легко убедиться, что с изменением значения прибыли в сторону увеличения ($L>8000$) семейство соответствующих прямых пойдет выше линии L (на графике это направление обозначено стрелкой), то есть будет удаляться от начала координат. И, наоборот, с уменьшением прибыли ($L<8000$) линии критерия будут смещаться к началу осей координат и при $x_1=x_2=0$ прибыль будет равна 0 (начало координат).

Нас интересует только процесс достижения максимальной прибыли. Сдвигая линию L по направлению удаления ее от начала координат, легко убедиться, что последний раз эта линия соприкоснется с областью допустимых значений существования максимума прибыли (на графике эта область заштрихована) в точке G. Эта точка и будет соответствовать максимальному достижению критерия — максимальной величине прибыли.

Рассматривая график, видим, что точке G соответствуют значения $x_1\approx1700$, $x_2\approx1600$ [1]. Итак, максимальная величина прибыли достигается в том случае, если хозяйство будет производить 1700 ц проса и 1600 ц гречихи. Прибыль в этом случае составит порядка 13 тыс. руб. $(2\cdot1700)+(6\cdot1600)=13\,000$.

При необходимости координаты точки G можно определить точно. Для этого надо решить систему двух уравнений, каждое из которых соответствует тем линиям, на пересечении которых эта точка находится,— линиям K и l.

$$\begin{aligned} 0{,}1x_1+0{,}4x_2&=800;\\ 0{,}07x_1+0{,}05x_2&=200. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Решив эту систему любым из известных методов, определим точное значение координат точки G. Они будут соответственно равны: $x_1=1740$, $x_2=1565$. Прибыль в этом случае составит 12 870 руб.:

$$(2\cdot1740+6\cdot1565)=12\,870.$$

[1] Здесь поставлены знаки $\approx$ (примерно равно), поскольку по графику весьма трудно определить координаты точек с достаточно высокой степенью точности.

Легко убедиться, что именно в этом случае, то есть при $x_1=1740$ и $x_2=1565$, прибыль будет максимальной. Попробуем доказать это экономически. Рассмотрим, все ли ресурсы и в каком объеме будут использованы при таком сочетании посевов проса и гречихи. Начнем с площади пашни. Из имеющихся 200 га вычтем площадь, отводимую при оптимальном варианте под просо и гречиху:

$$200-(0{,}07\cdot 1740+0{,}05\cdot 1565)=0^{1}.$$

Убеждаемся, что при такой комбинации посевов проса и гречихи площадь пашни используется полностью и что дальнейшее увеличение площади под этими культурами, а значит и прибыли, невозможно. Остается тогда одна возможность — искать увеличения прибыли путем изменения площадей под культурами. При одинаковой рентабельности культур под гречиху меньше расходуется пашни (в расчете на 1 ц продукции), чем под просо, и в этом отношении казалось бы надо заменять просо на гречиху. Однако в нашем примере не одна только площадь пашни лимитирует производство, участвует и второй ресурс — удобрения, норма внесения которых под просо (в расчете на 1 ц) в четыре раза ниже, чем под гречиху. А с этой точки зрения производство гречихи нецелесообразно увеличивать за счет проса.

Таким образом, замена производства проса гречихой, выгодная с точки зрения использования пашни, является нерациональной с точки зрения расхода удобрений и, естественно, возможна лишь при наличии излишнего, свободного количества удобрений.

Посмотрим, какое количество удобрений используется в случае, если производится 1740 ц проса и 1565 ц гречихи $(0{,}1\cdot 1740)+(0{,}4\cdot 1565)=800$. Таким образом, при $x_1=1740$ и $x_2=1565$ второй ресурс используется также полностью. А раз оба (первый и второй ресурсы) используются полностью и нормы замены одного вида производства на другой с точки зрения экономии в расходовании ресурсов противоположны, то улучшить программу производства и достичь еще большей прибыли не представляется возможным. Мы еще раз убеждаем-

---

[1] Получаемую при этом ошибку в 0,05 га в расчет не принимаем, как относительно малую.

ся в том, что найденный вариант сочетания выращивания проса и гречихи является оптимальным и приводит к достижению максимальной величины прибыли, равной 12 870 руб.

Графическое изображение наглядно, однако решать задачи этим методом можно лишь в том случае, если речь идет только о двух переменных. Для задач с большим числом переменных разработаны специальные методы линейного программирования.

§ 5. Краткие выводы, методические советы и задания

Основное внимание при изучении материала этой главы следует уделить четкому уяснению смысла задачи линейного программирования, ее экономической постановке и математической записи. Полезно самостоятельно составить несколько простейших задач с конкретным экономическим смыслом (подобрать нормативы, установить ограничения, выяснить, что является в данной задаче неизвестными величинами, какова целевая функция) и записать условия задачи в математической форме. После этого перейти от прямой задачи к двойственной. Следует продумать, каков экономический смысл двойственной задачи, и записать ее условия в математической форме. Надо также четко уяснить характеристику методов линейного программирования, геометрический смысл и методику решения простейших задач линейного программирования с помощью графического метода. Рекомендуем выполнить следующие задания:

Задание 1. Исходя из условий задания 1, постройте к каждой прямой задаче двойственную задачу линейного программирования и определите, имеют ли решение прямая и двойственная задачи.

2.1. $$\begin{aligned} 1{,}5x_1+4x_2 &\leqslant 5000; \\ x_1+3x_2 &\leqslant 8000; \\ x_1\geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 2000. \\ L=2x_1+6x_2 &\to \max. \end{aligned}$$

2.2. $$\begin{aligned} x_1+2x_2 &\leqslant 4; \\ 2x_1+3x_2 &\leqslant 3; \\ x_1\geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \\ L=5x_1+x_2 &\to \max. \end{aligned}$$

2.3. $$\begin{aligned} 2x_1+6x_2 &\geqslant 10; \\ 3x_1+2x_2 &\geqslant 6; \\ x_1\geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \\ L=2x_1+3x_2 &\to \max. \end{aligned}$$

2.4. $$\begin{aligned} 2x_1+4x_2 &\leqslant 8; \\ 6x_1+4x_2 &\leqslant 12; \\ x_1\geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \\ L=2x_1-3x_2 &\to \min. \end{aligned}$$

Задание 2. Решите графически следующие задачи.

2.5. $0{,}05x_1+0{,}03x_2\leqslant 300;$
$x_1+4x_2\leqslant 6000;$
$x_1\geqslant 500;\ x_2\geqslant 200.$
$L=4x_1+2x_2\longrightarrow\max.$

2.6. $0{,}06x_1+0{,}06x_2\leqslant 300;$
$0{,}1x_1+0{,}4x_2\leqslant 800;$
$x_1\geqslant 1000;\ x_2\geqslant 300.$
$L=2x_1+5x_2\longrightarrow\max.$

2.7. $6x_1+4x_2\leqslant 20\,000;$
$2x_1+4x_2\leqslant 8000;$
$x_1\geqslant 1000;\ x_2\leqslant 1500.$
$L=3x_1+5x_2\longrightarrow\max.$

2.8. $0{,}07x_1+0{,}05x_2\leqslant 250.$
$3x_1+3x_2\leqslant 6000;$
$x_1\leqslant 2000;\ x_2\geqslant 1000$
$L=3x_1+4x_2\longrightarrow\max.$

2.9. $3x_1-x_2\geqslant 9;$
$2x_1+3x_2\leqslant 50;$
$-x_1+4x_2\geqslant 19.$
$L=x_1+5x_2\longrightarrow\min.$

2.10. $-4x_1+5x_2\leqslant 30;$
$3x_1-x_2\leqslant 15;$
$5x_1+2x_2\geqslant 30.$
$L=3x_1+2x_2\longrightarrow\min.$

ГЛАВА 3
СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для того чтобы лучше уяснить идею симплексного метода и научиться применять его для практических расчетов, сформулируем и решим несколько задач с различными типами ограничений и разными целевыми функциями.

§ 1. Задача, в которой область существования максимума целевой функции ограничена сверху

Задача 3.1. Предположим, что некоторый совхоз может дополнительно к фактически производимой продукции производить еще продукцию трех видов: I, II и III. В распоряжении хозяйства имеются необходимые для этого ресурсы (А, Б, В, Г) в размере: А — 24 единицы, Б — 80, В — 10 и Г — 6 единиц. Подсчитано, что если хозяйство будет производить и реализовать эти продукты, то прибыль в расчете на единицу I продукта составит 18 руб., II продукта — 12 руб. и III продукта — 8 руб. Нормативы затрат ресурсов на производство единицы продукции известны (табл. 3.1).

Хозяйство, естественно, заинтересовано в такой структуре производства, чтобы достигалась максимальная прибыль [1].

[1] Задача предельно упрощена, а нормативы и объемы ресурсов взяты такие, чтобы легче было считать и контролировать результаты расчета.

Таблица 3.1

Нормативы затрат ресурсов на единицу продукции

Ресурсы	Виды продукции		
	I	II	III
А	5	7	4
Б	10	5	20
В	5	2	1
Г	2	1	1

От экономической постановки задачи перейдем к ее математической формализации. Обозначим искомый объем производства продукции I вида через x_1, продукции II вида — x_2, продукции III вида — x_3. Тогда потребное количество ресурса А на производство продукции I вида составит $5x_1$, на производство продукции II вида — $7x_2$ и на производство продукции III вида — $4x_3$.

Если будут производиться все три продукта, то общая сумма затрат ресурса А составит: $5x_1+7x_2+4x_3$. По условию задачи в распоряжении хозяйства имеется лишь 24 единицы этого ресурса, значит, данное ограничение запишется в виде неравенства:

$$5x_1+7x_2+4x_3\leqslant 24.$$

Аналогично можно составить и неравенства по другим ресурсам:

$$10x_1+5x_2+20x_3\leqslant 80;$$
$$5x_1+2x_2+x_3\leqslant 10;$$
$$2x_1+x_2+x_3\leqslant 6.$$

Обозначив искомую величину прибыли через L, запишем, что

$$L=18x_1+12x_2+8x_3\longrightarrow \max.$$

Объединенные вместе четыре неравенства и критерий оптимальности (целевая функция) характеризуют математическую запись задачи в развернутой форме (3.1). Эта запись называется развернутой моделью данной задачи. Итак:

найти $L=18x_1+12x_2+8x_3\longrightarrow \max$

при условии: 1) $5x_1+7x_2+4x_3\leqslant 24;$

$$10x_1+5x_2+20x_3\leqslant 80; \qquad (3.1)$$

$$5x_1+2x_2+x_3\leqslant 10;$$

$$2x_1+x_2+x_3\leqslant 6.$$

2) $(x_1,\ x_2,\ x_3)\geqslant 0.$

Более компактно эта задача может быть записана так:

найти $L=\sum\limits_{j=1}^{3} c_jx_j\to\max$

при условии: 1) $\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_j\leqslant A_i,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4);$ (3.2)

2) $x_j\geqslant 0,$

где j — индекс продукции;

i — индекс ресурса;

x_j — искомая величина производства продукции j-ого вида;

c_j — прибыль в расчете на единицу продукции j-ого вида;

a_{ij} — норма затрат ресурса i-ого вида на производство единицы продукции j-ого вида;

A_i — имеющийся объем ресурсов i-ого вида.

Запись вида (3.2) характеризует структурную модель задачи. Как нетрудно убедиться, поставленная нами задача полностью подходит под задачу линейного программирования, а решается такая задача симплексным методом.

Для ее решения необходимо прежде всего преобразовать исходные неравенства в уравнения, или, что то же самое, свести задачу к так называемому каноническому виду. Поскольку левые части неравенства менее или равны правым частям, то для преобразования неравенства в равенства достаточно к левым частям добавить некоторые новые неизвестные, каждое из которых может принимать только положительные или нулевые значения. Итак, добавим в левую часть первого неравенства новую переменную, обозначив ее через x_4, в левую часть второго неравенства добавим x_5, в третье неравенство — x_6, в четвертое — x_7. Эти переменные называются дополнительными, в то время как неизвестные

x_1, x_2 и x_3 — основными. Введя дополнительные неизвестные в соответствующие уравнения системы (3.1), получим:

$$
\begin{aligned}
&5x_1+7x_2+4x_3+x_4=24;\\
&10x_1+5x_2+20x_3+x_5=80;\\
&5x_1+2x_2+x_3+x_6=10;\\
&2x_1+x_2+x_3+x_7=6.\\
&L=18x_1+12x_2+8x_3 \longrightarrow \max.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Экономически каждое из дополнительных неизвестных обозначает недоиспользованное количество соответствующих ресурсов при производстве продуктов. Например, x_6 обозначает недоиспользуемое количество ресурса В. Если же в оптимальном решении задачи окажется, что ресурс В необходимо использовать полностью, то x_6 обязательно будет равен нулю. Все это становится еще более понятным, если проделаем с системой (3.3) простейшие преобразования — перенесем вновь введенные неизвестные (x_4, x_5, x_6 и x_7) в левую часть уравнений, а все остальное — в правую часть, то есть разрешим уравнения системы (3.3) относительно дополнительных неизвестных. Получим несколько иную по форме систему, эквивалентную предыдущей и исходной:

$$
\begin{aligned}
&x_4=24-(5x_1+7x_2+4x_3);\\
&x_5=80-(10x_1+5x_2+20x_3);\\
&x_6=10-(5x_1+2x_2+x_3);\\
&x_7=6-(2x_1+x_2+x_3).\\
&L=0-(-18x_1-12x_2-8x_3)^1.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Систему (3.4) назовем симплексной системой, поскольку от нее можно непосредственно перейти к построению симплексных таблиц. Отличительная особенность этой системы заключается в том, что каждое ее уравнение разрешено относительно дополнительных неизвестных (x_4, x_5, x_6, x_7). Причем в том случае, если хозяйство откажется от производства продукции всех видов, то есть когда $x_1=x_2=x_3=0$, дополнительные неизвестные получат свои предельные значения и будут

---

[1] Знак стремления функции к максимальному для удобства в системе и в дальнейших таблицах опущен.

равны: $x_4=24$, $x_5=80$, $x_6=10$ и $x_7=6$. Данный случай будет соответствовать такому варианту программы (плана), когда ничего не производится, ресурсы не используются, значение целевой функции равно нулю.

Для того, чтобы уравнение целевой функции ($L=18x_1+12x_2+8x_3$) полностью соответствовало уравнениям системы (3.4), преобразуем его и запишем в таком виде: $L=0-(-18x_1-12x_2-8x_3)$. Легко понять, что если раскрыть скобки, то уравнение целевой функции примет первоначальный вид.

Из системы (3.4) видно, что если $x_1=x_2=x_3=0$, то действительно $x_4=24$, $x_5=80$, $x_6=10$, $x_7=6$, а $L=0$. Случай, когда основные неизвестные равны нулю, назовем начальным (базисным) состоянием программы (плана). Оно является базисным, ибо значение дополнительных неизвестных, равное величине имеющихся ресурсов при равенстве основных неизвестных нулю, образует некоторый базис решения задачи.

Базисное решение задачи, как в этом нетрудно убедиться, является допустимым. Такое решение задачи принято называть опорным решением или опорным планом задачи. Оптимальное решение — наилучшее среди опорных решений.

Логика расчета оптимального варианта заключается в постепенном улучшении опорного решения по определенному правилу. В этом случае ресурсы используются все более полно, а значение целевой функции приближается к своему экстремальному значению. Расчет оптимального варианта симплексным методом удобнее вести с помощью специальных (симплексных) таблиц.

Составим на основании системы (3.4) симплексную таблицу 1.1 [1], скобки в системе (3.4) при этом не раскрываются.

Если в правой части симплексной таблицы проставлены столбцы дополнительных неизвестных, в данном случае столбцы x_4, x_5, x_6 и x_7, то такую таблицу принято называть полной симплексной таблицей; если столбцов с дополнительными неизвестными нет, таблицу называют сокращенной. Ниже будет показано, что приме-

[1] Номер 1.1 означает, что строится первая таблица первой задачи. Оценки эффективности дополнительных переменных в строке равны нулю, поскольку эти переменные характеризуют недоиспользуемые объемы ресурсов.

нение сокращенных таблиц позволяет экономить время на расчетах. Однако сокращенные симплексные таблицы позволяют получать лишь так называемое субоптимальное решение. Ими можно пользоваться лишь тогда, когда можно быть заранее уверенным, что ресурсы будут использоваться полностью. В противном случае получается лишь приближенное решение. Для освоения алгоритма симплексного метода и при решении задач вручную ради экономии времени можно пользоваться сокращенными симплексными таблицами.

Симплексная таблица 1.1

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные переменные			Дополнительные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	24	5	7	4	1	0	0	0
x_5	80	10	5	20	0	1	0	0
x_6	10	5	2	1	0	0	1	0 →
x_7	6	2	1	1	0	0	0	1
L	0	−18	−12	−8	0	0	0	0
		↑						

Для начала расчетов оптимального варианта в симплексной таблице 1.1 у нас имеется некоторый базис (x_4, x_5, x_6 и x_7). После проведения расчетов в этих столбцах получают результаты оптимального варианта. Однако в этом случае в базисе на месте некоторых дополнительных неизвестных обязательно должны находиться основные переменные (одна, две или все), а на месте нулевого элемента на пересечении строки L и столбца свободных членов должен обязательно находиться положительный элемент, так как по условию задачи производство продуктов рентабельно.

Итак, в план необходимо ввести производство одного из трех продуктов. Подчеркиваем, что на любом этапе расчетов в план вводится лишь один продукт, одна переменная. У нас три возможности: ввести в план I продукт, II или III. В принципе можно взять любой из этих продуктов и ввести в план, математически и экономически это допустимо. Однако логичнее начать расчеты с того продукта, который на единицу продукции приносит наибольшую прибыль. В данном случае это I продукт, единица которого дает 18 руб. прибыли.

Для того чтобы узнать, какое количество I продукта можно максимально произвести, необходимо сравнить отношение имеющихся ресурсов к соответствующим нормам затрат, то есть следует рассмотреть отношения: $\frac{24}{5}$ (по ресурсу А), $\frac{80}{10}$ (по ресурсу Б,), $\frac{10}{5}$ (по ресурсу В) и $\frac{6}{2}$ (по ресурсу Г).

Сравнивая эти отношения, видим, что в соответствии с наличием ресурсов и нормами их затрат максимально можно произвести лишь две единицы I продукта. Производство этого продукта в наибольшей степени лимитирует ресурс В, ибо если поделить наличие этого ресурса (10) на норму его затрат (5), то в результате получим 2. В то время как $\frac{24}{5}=4{,}8$; $\frac{80}{10}=8{,}0$; $\frac{6}{2}=3{,}0$, то есть с точки зрения наличия и норм затрат ресурса А, Б и Г можно производить значительно больше — соответственно 4,8; 8,0 и 3,0 единицы этого продукта.

Введем производство I продукта в решение задачи. В этом случае столбец x_1, соответствующий тому продукту, который решили ввести в план, называется разрешающим. Здесь и далее разрешающим будем называть столбец, соответствующий максимальному отрицательному по модулю (если задача решается на максимум и целевая функция преобразована в том виде, как это показано в данном примере) коэффициенту целевой функции. В симплексной таблице 1.1 этот столбец обозначен снизу стрелкой. По аналогии с разрешающим столбцом разрешающей строкой называется такая строка таблицы, которая дает минимальное отношение коэффициентов столбца свободных членов к соответствующим коэффициентам (обязательно положительным) разрешающего столбца. В данном случае это строка, соответствующая ресурсу В и содержащая базисное неизвестное x_6. В симплексной таблице 1.1 эта строка также выделена стрелкой.

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится элемент, равный 5. Он называется генеральным элементом. В симплексной таблице 1.1 генеральный элемент выделен жирным шрифтом.

После того как определили разрешающий столбец, разрешающую строку и генеральный элемент, переходим к составлению нового плана. Содержание этого плана будет отражено в симплексной таблице 1.2, которую необходимо построить. По форме симплексная таблица 1.2, как впрочем и все остальные таблицы, идентична таблице 1.1. Однако по сравнению с таблицей 1.1 в таблице 1.2 переменная x_1 войдет в базис, а x_6 — выйдет из базиса.

Симплексная таблица 1.2

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные переменные			Дополнительные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	14	0	5	3	1	0	−6	0 →
x_5	60	0	1	18	0	1	−2	0
x_1	2	1	0,4	0,2	0	0	0,2	0
x_7	2	0	0,2	0,6	0	0	−0,4	1
L	36	0	−4,8 ↑	−4,4	0	0	+3,6	0

После того как составили макет таблицы 1.2, переходим к ее заполнению. Коэффициенты таблицы 1.2 рассчитываются на основании коэффициентов предыдущей таблицы. Прежде всего определяются коэффициенты строки x_1, стоящей в таблице 1.2 на месте разрешающей строки таблицы 1.1. Они рассчитываются путем деления соответствующих коэффициентов строки x_6 таблицы 1.1 на генеральный элемент 5, то есть $\frac{10}{5}=2$; $\frac{5}{5}=1$; $\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{1}{5}=0{,}2$; $\frac{1}{5}=0{,}2$.

Значит, в таблице 1.2 в строке x_1 должны последовательно находиться следующие числа: 2, 1, 0,4, 0,2, и 0,2. После этого переходим к расчету остальных элементов таблицы 1.2 [1].

Чтобы определить их, надо строку x_1 таблицы 1.2 последовательно умножить на числа, стоящие в разрешающем столбце таблицы 1.1, взятые с обратным знаком, и полученные результаты сложить с соответствующей строкой таблицы 1.1. Цель данной операции — добиться, чтобы в столбце, стоящем на месте разрешающего в таблице 1.2, находились нулевые элементы, за

[1] Здесь излагается один из возможных и, по нашему мнению, наиболее простой и легко запоминающийся прием заполнения коэффициентами очередной симплексной таблицы, напоминающий метод исключения неизвестных.

исключением элемента, находящегося на месте генерального и равного единице.

В первой строке таблицы 1.1 в разрешающем столбце находится число 5. Значит, строку x_1 таблицы 1.2 нам следует умножить на минус 5 и результат сложить со строкой x_4 таблицы 1.1. Сделав это, получим:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} -10; & -5; & -2; & -1; & 0; & 0; & -1; & 0 \\ +\ 24; & 5; & 7; & 4; & 1; & 0; & 0; & 0 \\ \hline 14; & 0; & 5; & 3; & 1; & 0; & -1; & 0 \end{array}$$

Результат запишем в строку x_4[1] симплексной таблицы 1.2. Подобным образом умножим коэффициенты строки x_1 симплексной таблицы 1.2 на -10, -2, 18 и полученные результаты соответственно сложим с коэффициентами строк x_5, x_7 и L симплексной таблицы 1.1. В результате этой операции симплекс-таблица 1.2 будет заполнена. После этого заканчивается один цикл (итерация) расчетов. Методика перехода от одной симплексной таблицы к другой повторяется.

Проанализируем новый вариант плана, представленный в симплекс-таблице 1.2. Согласно ему, следует производить две единицы первого продукта ($x_1=2$). В этом случае остаются недоиспользуемые ресурсы А, Б и Г. Их количество показывают соответствующие базисные переменные ($x_4=14$, $x_5=60$, $x_7=2$). Прибыль при таком плане составит 36 руб. ($L=36$).

Естественно задать вопрос — является ли оптимальным этот вариант плана? Для того чтобы на него ответить, необходимо знать признак оптимальности решения задачи. Сформулируем его.

Признак оптимальности. Если целевая функция задачи линейного программирования, решаемой симплекс-методом, стремится к максимуму и представлена в преобразованном виде (как в нашем примере), то решение считается оптимальным, если в некоторой по порядку симплексной таблице в целевой строке (L) не будет отрицательных чисел.

В строке L симплекс-таблицы 1.2 имеется два отрицательных числа ($-4{,}8$ и $-4{,}4$), значит, план в ней не оптимальный и его необходимо улучшить.

---

[1] Нумерацию строк в симплексных таблицах будем обозначать по номерам базисных неизвестных: строка x_4, строка x_5 и т. д.

Вновь, как и ранее, среди отрицательных чисел строки L симплекс-таблицы 1.2 выберем наибольшее по модулю отрицательное число. Это число $(-4{,}8)$ находится в столбце x_2. Этот столбец и будет разрешающим (выделим его стрелочкой). Составляем отношение элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца и среди этих отношений находим минимальное: $\frac{14}{5}=2{,}8$; $\frac{60}{1}=60$; $\frac{2}{0{,}4}=5$; $\frac{2}{0{,}2}=10$.

Минимальное соотношение (2,8) соответствует строке x_4, которая и является разрешающей. Генеральный элемент равен 5.

В соответствии с изложенной выше методикой составляем симплексную таблицу 1.3.

Симплексная таблица 1.3

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные переменные			Дополнительные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	2,8	0	1	0,6	0,2	0	−0,2	0
x_5	57,2	0	0	17,4	−0,2	1	−1,8	0
x_1	0,88	1	0	−0,04	−0,08	0	0,28	0
x_7	1,44	0	0	**0,48**	−0,04	0	−0,36	1 →
L	49,44	0	0	−1,52	0,96	0	2,64	0
				↑				

Просматривая значение коэффициентов строки L симплексной таблицы 1.3, видим, что в ней имеется один отрицательный коэффициент $(-1{,}52)$. Поэтому в соответствии с признаком оптимальности решения задачи план, представленный в симплексной таблице 1.3 ($x_2=2{,}8$; $x_5=57{,}2$; $x_1=0{,}88$; $x_7=1{,}44$; $L=49{,}44$), не является оптимальным, хотя он и лучше предыдущего, так как значение L в этой таблице равно 49,44, а в предыдущем лишь 36. Переходим к построению симплексной таблицы 1.4.

В строке L симплексной таблицы 1.4 не имеется отрицательных коэффициентов, поэтому в соответствии с признаком оптимальности решение в ней наилучшее.

Таким образом, оптимальной будет следующая программа: $x_1=1$; $x_2=1$; $x_3=3$, то есть совхозу необходимо производить одну единицу продукции I вида, одну единицу продукции II вида и три единицы продукции III вида. Прибыль в этом случае будет максимальной и составит 54 руб. Действительно: $(1\cdot18)+(1\cdot12)+(3\cdot8)=18+12+24=54$.

Симплексная таблица 1.4

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные переменные			Дополнительные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	1	0	1	0	0,25	0	0,25	−1,25
x_5	5	0	0	0	1,249	1	11,25	−36,24
x_1	1	1	0	0	−0,113	0	0,25	0,083
x_3	3	0	0	1	−0,083	0	−0,75	2,083
L	54,0	0	0	0	0,834	0	1,50	3,166

Особенностью рассмотренной задачи с математической точки зрения были два момента. Во-первых, знаки неравенств, характеризующих условия задачи, повернуты в левую сторону, то есть область существования максимального значения функции L ограничена сверху. Во-вторых, целевая функция задачи стремилась к максимуму, а все коэффициенты при неизвестных — положительные числа.

§ 2. Задача, в которой область существования максимума целевой функции не ограничена сверху

Задача 3.2. Внесем некоторые изменения в условие задачи 3.1. Предположим, что ресурсы А, Б, В и Г имеются в неограниченном количестве. Остальные условия оставим без изменения. Получим несколько иную задачу. Экономический смысл ее сводится к тому, что требуется определить оптимальное сочетание производства трех продуктов в условиях неограниченности ресурсов с таким расчетом, чтобы общая масса прибыли от производства и реализации этих продуктов была максимальной.

Нетрудно понять, что практического значения такая задача не имеет, поскольку случай неограниченности ресурсов нереален. Однако она имеет вполне определенный теоретический и математический смысл. Ибо при такой постановке задачи все переменные и целевая функция будут неограниченно стремиться к бесконечности. Математически данная задача запишется так:

найти $L=18x_1+12x_2+8x_3 \longrightarrow \max$

при условии: 1) $5x_1+7x_2+4x_3 \geqslant 0;$

$$\begin{aligned} &10x_1+5x_2+20x_3 \geqslant 0; \\ &5x_1+2x_2+x_3 \geqslant 0; \\ &2x_1+x_2+x_3 \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

2) $(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0.$

Легко убедиться в том, что решение задачи в этом случае будет выглядеть так: $(x_1, x_2, x_3$ и $L) \rightarrow \infty$.

На основании рассмотренной задачи 3.2 можно сформулировать следующий вывод.

Если в задаче линейного программирования область существования максимума целевой функции не ограничена сверху, то значение переменных и целевой функции стремится к бесконечности.

§ 3. Задача, в которой область существования минимума целевой функции ограничена сверху

Задача 3.3. Вернемся к условию задачи 3.1. Предположим, что целевая функция задачи стремится не к максимуму, как ранее, а к минимуму, то есть $L=18x_1+$ $+12x_2+8x_3 \rightarrow \min$. Математическая запись остальных условий задачи остается прежней. Экономически такая постановка задачи может, например, обозначать тот факт, что хозяйство желает определить такую структуру производства, чтобы общие затраты на производство продуктов были минимальными. В этом случае коэффициенты при иксах в целевой функции могут обозначать не прибыль, как ранее, а, например, себестоимость единицы продукции.

Тогда в математической форме задача запишется так:

найти $L=18x_1+12x_2+8x_3 \longrightarrow \min$

при условии: 1) $5x_1+7x_2+4x_3 \leqslant 24;$

$$\begin{aligned} &10x_1+5x_2+20x_3 \leqslant 80; \\ &5x_1+2x_2+x_3 \leqslant 10; \\ &2x_1+x_2+x_3 \leqslant 6. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

2) $(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0.$

Нетрудно догадаться, что при такой постановке задачи минимальное значение L будет тогда, когда $x_1=x_2=x_3=0$. В этом случае L будет также равно 0. Это произошло потому, что в задаче отсутствуют ограничения снизу на переменные. Отсюда можно сделать вывод, что если в задаче линейного программирования отсутствуют ограничения снизу на переменные, а целевая функция стремится к минимуму, то минимальное значение целевой функции равно нулю и достигается тогда, когда все переменные равны нулю. В этом случае задача имеет нулевое решение.

§ 4. Задача, в которой область существования минимума целевой функции ограничена снизу

Перейдем к рассмотрению другого случая, когда в задаче линейного программирования требуется определить минимальное значение целевой функции, а все неравенства повернуты в правую сторону, то есть область существования минимума целевой функции ограничена снизу.

Постановка такой задачи в значительной степени отличается от сформулированных ранее. В соответствии с этим принцип нахождения оптимального варианта и признак оптимальности решения таких задач будет несколько иным по сравнению с изложенными ранее.

Задача 3.4. Пусть требуется решить такую задачу, условия которой описываются следующими неравенствами и целевой функцией:

$$\begin{aligned} &\text{найти } L=12x_1+27x_2+6x_3 \longrightarrow \min \\ &\text{при условии: } 2x_1+3x_2+2x_3 \geqslant 12; \\ &\qquad x_1+3x_2+x_3 \geqslant 6; \\ &\qquad 6x_1+9x_2+2x_3 \geqslant 24. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Такие задачи часто возникают при определении оптимальных составов смесей, а в сельском хозяйстве — при определении оптимальных кормовых рационов и кормосмесей для скота и птицы. Целевая функция в этом случае отражает стремление к минимуму затрат на рацион. Свободные члены — нижний предел содержания в нем различных питательных веществ, а коэффициенты при неизвестных — содержание конкретных питательных веществ в единице некоторого корма.

С математической точки зрения данная задача представляет свой интерес, поскольку целевая функция в ней стремится к минимуму в условиях ограничения снизу области ее существования.

Решим данную задачу. Преобразуем неравенства исходной системы в уравнения, введя дополнительные неизвестные x_4, x_5 и x_6. Получим:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+2x_3-x_4&=12; \\ x_1+3x_2+x_3-x_5&=6; \\ 6x_1+9x_2+2x_3-x_6&=24. \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$L=12x_1+27x_2+6x_3 \longrightarrow \min.$$

Преобразуем систему (3.8) следующим образом. Среди свободных членов уравнений системы найдем максимальный и из уравнения, соответствующего этому свободному члену, вычтем остальные уравнения системы. Таким уравнением является третье. Вычитая из него первое и второе уравнения, получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{aligned} 4x_1+6x_2+x_4-x_6&=12; \\ 5x_1+6x_2+x_3+x_5-x_6&=18; \\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_6&=24. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$L=12x_1+27x_2+6x_3 \rightarrow \min.$$

Первое и второе уравнения системы (3.9) можно разрешить относительно неизвестных x_4 и x_5, а в третье уравнение введем искусственную переменную F, заранее зная, что она равна нулю, и разрешим его относительно этой переменной. Это позволит нам свести систему (3.9) к симплексной системе (3.10), на базе которой можно построить первую симплексную таблицу.

$$\begin{aligned} x_4&=12-(4x_1+6x_2-x_6); \\ x_5&=18-(5x_1+6x_2+x_3-x_6); \\ F&=24-(6x_1+9x_2+2x_3-x_6). \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$L=0-(-12x_1-27x_2-6x_3).$$

Построим полную симплексную таблицу 4.1, как это делали ранее, и будем минимизировать искусственную переменную или линейную форму F при заданных ограничениях.

Симплексная таблица 4.1

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные неизвестные			Дополнительные неизвестные		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	12	4	6	0	1	0	−1
x_5	18	5	6	1	0	1	−1
F	24	6	9	2	0	0	−1 →
L	0	−12	−27	−6	0	0	0
F	24	6	9	2	0	0	−1
				↑			

Столбец, соответствующий искусственной форме F, не включен в симплексную таблицу 4.1, так как нам не нужно вводить ее в базис. Отличительной особенностью этой таблицы является повторение строки F, которая второй раз записывается под целевой функцией, и на первом этапе расчетов нам необходимо доказать, что $F=0$, то есть минимизировать ее.

Приступим к минимизации линейной формы F с помощью симплекс-метода.

Просматривая последнюю строку симплексной таблицы 4.1, мы видим, что минимальный положительный элемент находится в столбце, содержащем x_3. Этот столбец является разрешающим. Обозначим его стрелкой. Составляя отношения элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца $\frac{18}{1} = 18$; $\frac{24}{2} = 12$, убеждаемся, что минимальное из них соответствует строке, содержащей F, которая является разрешающей. Генеральный элемент, как мы видим, равен 2.

Составим симплексную таблицу 4.2. Поделим коэффициенты строки, содержащей генеральный элемент, на его значение. Результат запишем в строку x_3, введя x_3 в базис вместо искусственной переменной F. Затем умножим строку x_3 симплексной таблицы 4.2 последовательно на коэффициенты разрешающего столбца, взятые с противоположным знаком (0; −1; 6; −2), и результат сложим соответственно со значением строки x_4, x_5, L и F симплексной таблицы 4.1. Короче говоря, воспользуемся идеей метода исключения неизвестных и добьемся того, чтобы в бывшем разрешающем столбце находились нулевые коэффициенты, за исключением коэффициента, стоящего на месте бывшего разрешающего и равного единице. Сделав это, получим симплексную таблицу 4.2.

Симплексная таблица 4.2

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные неизвестные			Дополнительные неизвестные		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	12	4	6	0	1	0	-1 →
x_5	6	2	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
x_3	12	3	$\frac{9}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
L	72	6	0	0	0	0	-3
F	0	0 ↑	0	0	0	0	0

В симплексной таблице 4.2 в строке F имеются только нулевые значения, то есть нам удалось доказать, что $F=0$. Из дальнейших расчетов эта строка исключается и последней остается строка L. В симплексной таблице 4.2 в строке L имеется один положительный коэффициент — 6. Значит, решение в ней не оптимальное. Продолжим расчеты.

1) Определим разрешающий столбец — x_1.

2) Составляем отношения: $\frac{12}{4}=3$; $\frac{6}{2}=3$; $\frac{12}{3}=4$.

Так как выбор минимального из отношений неоднозначен, за разрешающую строку можно взять любую из строк, соответствующих неизвестным x_4 и x_5. Пусть разрешающей будет строка, содержащая x_4. Генеральный элемент равен 4. Составим очередную симплексную таблицу по уже описанному принципу (табл. 4.3). Отсутствие в последний строке этой таблицы положительных элементов является признаком оптимальности решения. Ответ: $x_1=3$; $x_2=0$; $x_3=3$; $x_4=0$; $x_5=0$; $x_6=0$; $\min L=54$.

Проверка. 1. Посмотрим, выдерживаются ли условия задачи (3.8) при таких значениях переменных:

$$2\cdot3+3\cdot0+2\cdot3=12;$$
$$1\cdot3+3\cdot0+1\cdot3=6;$$
$$6\cdot3+9\cdot0+2\cdot3=24.$$

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные неизвестные			Дополнительные неизвестные		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	3	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$
x_5	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
x_3	3	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
L	54	0	−9	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$

Убеждаемся, что условия задачи не нарушаются.

2. Проверим значение целевой функции:

$L=12\cdot3+27\cdot0+6\cdot3=54$. Действительно, $L=54$.

Существуют и другие приемы решения аналогичных задач, основанные на использовании метода искусственного базиса.

Кратко остановимся на их идее. Рассмотрим систему (3.8). Поскольку в ней все дополнительные переменные имеют знак минус, то в левую часть каждого уравнения этой системы введем по искусственному неизвестному (y_1, y_2 и y_3), получим:

$$2x_1+3x_2+2x_3-x_4+y_1=12;$$
$$x_1+3x_2+x_3-x_5+y_2=6;$$
$$6x_1+9x_2+2x_3-x_6+y_3=24.$$

Разрешим уравнения этой системы относительно y_1, y_2 и y_3 и одновременно введем вспомогательную форму $F=y_1+y_2+y_3$, получим:

$$y_1=12-(2x_1+3x_2+2x_3-x_4);$$
$$y_2=6-(x_1+3x_2+x_3-x_5);$$
$$y_3=24-(6x_1+9x_2+2x_3-x_6).$$
$$F=y_1+y_2+y_3=32-(9x_1+15x_2+5x_3-x_4-x_5-x_6).$$

После этого следует построить первую симплексную таблицу и приступить к минимизации формы F. Целевая функция L при минимизации вспомогательной формы F играет пассивную роль. Все остальные расчеты осуществляются по изложенному выше принципу.

Часто в литературе вместо метода искусственного базиса при решении аналогичных задач фигурирует другое название — M-метод. Отличие его заключается в том, что искусственным переменным придаются такие оценки эффективности, которые значительно превосходят максимальную оценку основных переменных. Это делается для того, чтобы при минимизации целевой функции искусственные переменные не вошли в оптимальное решение. Принцип расчета оптимального варианта при этом не меняется. Более подробно о методе можно прочесть, например, в учебном пособии Р. Г. Кравченко, И. Г. Попова и С. З. Толпекина «Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства». (М., «Колос», 1973).

§ 5. Задача, в которой область существования максимума целевой функции ограничена сверху и снизу

Пусть требуется решить следующую задачу линейного программирования [1].

Задача 3.5.

Найти $L=2x_1+6x_2 \to \max$

при условии:

$$\begin{aligned} 0{,}07x_1+0{,}05x_2 &\leqslant 200; \\ 0{,}1x_1+0{,}4x_2 &\leqslant 800; \\ x_2 &\geqslant 1000; \\ x_1 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Особенностью этой задачи является наличие в ее условиях двухсторонних ограничений, то есть область существования максимума функции L ограничена снизу и сверху.

Решим задачу с помощью симплексного метода.

Прежде всего целесообразно преобразовать исходные неравенства задачи так, чтобы освободиться от

[1] Экономический смысл задачи здесь не рассматривается, поскольку он приведен ранее (гл. 2, § 4).

дробных чисел. Поделим обе части первого неравенства на 0,05, а второго на 0,1 и перепишем условия задачи в виде следующей системы неравенств:

$$\begin{aligned} 1{,}4x_1+x_2&\leqslant 4000;\\ x_1+4x_2&\leqslant 8000;\\ x_2&\geqslant 1000.\\ L=2x_1+6x_2&\to \max. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Преобразовав неравенства системы (3.12) в уравнения, получим новую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{aligned} 1{,}4x_1+x_2+x_3&=4000;\\ x_1+4x_2+x_4&=8000;\\ x_2-x_5&=1000.\\ L=2x_1+6x_2&\to \max. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Разрешим первое и второе уравнения системы (3.13) относительно x_3 и x_4, а третье уравнение — относительно x_5, поменяв предварительно в обеих частях этого уравнения знаки на противоположные (это необходимо для того, чтобы неизвестное x_5 было положительным). Функцию L также преобразуем так, как это делали ранее. Получим систему (3.14):

$$\begin{aligned} x_3&=4000-(1{,}4x_1+x_2);\\ x_4&=8000-(x_1+4x_2);\\ x_5&=-1000-(-x_2).\\ L&=0-(-2x_1-6x_2). \end{aligned} \tag{3.14}$$

На основании этой системы составляем первую симплексную таблицу.

Симплексная таблица 5.1

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные неизвестные		Дополнительные неизвестные		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4 000	1,4	1	1	0	0
x_4	8 000	1	4	0	1	0→
x_5	—1 000	0	—1	0	0	1
L	0	—2	—6 ↑	0	0	0

Разрешающим будет столбец x_2, поскольку в строке L ему соответствует наибольшее абсолютное значение отрицательного коэффициента (-6). Разрешающей строкой будет строка x_4, поскольку ей соответствует наименьшее отношение коэффициентов столбца свободных членов к положительным коэффициентам разрешающего столбца: $\frac{4000}{1}=4000$, а $\frac{8000}{4}=2000$. Генеральный элемент находится на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца и равен 4.

Переходим к составлению симплексной таблицы 5.2, в которой по сравнению с таблицей 5.1 неизвестное x_4 выведено из базиса, а вместо него в базис введено неизвестное x_2, соответствующее разрешающему столбцу.

Элементы симплексной таблицы 5.2 определяют так же, как и ранее. Сперва рассчитывают элементы строки, стоящей на месте бывшей разрешающей. Их находят делением коэффициентов строки x_4 таблицы 5.1 на генеральный элемент: $\frac{8000}{4}=2000$; $\frac{1}{4}=0{,}25$; $\frac{4}{4}=1$ и т. д. Полученные значения соответственно заносят в клетки бывшей разрешающей строки. Остальные элементы таблицы 5.2 получают на основе коэффициентов таблицы 5.1 и коэффициентов только что полученной строки (x_2), стоящей на месте бывшей разрешающей. Вновь используем принцип исключения неизвестных. Например, для того чтобы получить коэффициенты строки x_3 таблицы 5.2, достаточно все коэффициенты строки x_2 таблицы 5.2 умножить на -1 и результат поэлементно сложить с соответствующими коэффициентами строки x_3 таблицы 5.1. Аналогичным образом рассчитывают и коэффициенты других строк, включая L. Проделав эту операцию, получим симплексную таблицу 5.2.

Симплексная таблица 5.2[1]

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные неизвестные		Вспомогательные неизвестные		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2 000	1,15	0	1	−0,25	0 →
x_2	2 000	0,25	1	0	0,25	0
x_5	1 500	0,25	0	0	0,25	1
L	12 000	−0,50 ↑	0	0	1,50	0

[1] Расчеты с точностью до одной сотой.

Поскольку в симплексной таблице 5.2 в строке L имеется отрицательный коэффициент, то в соответствии с признаком оптимальности решение в ней не является наилучшим. Продолжим решение задачи. Строим по описанному алгоритму следующую (третью) симплексную таблицу.

Симплексная таблица 5.3

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	Основные неизвестные		Вспомогательные неизвестные		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1 739,13	1	0	0,87	$-0{,}22$	0
x_2	1 565,22	0	1	$-0{,}22$	0,30	0
x_5	565,22	0	0	$-0{,}22$	0,30	1
L	12 869,57	0	0	0,43	1,41	0

В строке L симплексной таблицы 5.3 отсутствуют отрицательные коэффициенты, значит, нам удалось получить оптимальное решение задачи. Ответ берем из симплексной таблицы 5.3, приравнивая базисные неизвестные и целевую функцию соответствующим значениям коэффициентов в столбце свободных членов. Ответ: $x_1=1739$; $x_2=1565$, $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=565$; $L=12\,870$.

§ 6. Краткие выводы, методические советы и задания

После того как мы рассмотрели несколько задач, решаемых с помощью симплексного метода, уместно сделать несколько практических выводов и пояснений относительно методики расчета по симплексному методу и его применения для решения практических задач.

1. Применение симплекс-метода возможно лишь в том случае, когда условия задачи линейного программирования сформулированы в виде ограничений, а целевая функция имеет также линейную форму.

Допустимое решение системы (3.4), при котором функция L принимает экстремальное значение, называется оптимальным решением.

Заметим, что если величина L принимает наибольшее значение, то величина $(-L)$ принимает наименьшее значение. Следовательно, задача об отыскании наибольшего значения функции L может быть сведена к задаче об отыскании наименьшего значения функции:

$$(-L)=(-c_1)x_1+(-c_2)x_2+\ldots+(-c_n)x_n.$$

Иными словами,

$$\max L=-(-\min L).$$

2. Задача линейного программирования может иметь решение лишь в том случае, если исходная система совместна. При этом в большинстве задач линейного программирования должно выполняться условие $x_j \geqslant 0$, то есть неотрицательности некоторых переменных. Но оно не является обязательным для всех задач и всех переменных.

3. Оптимальное решение в задаче линейного программирования может существовать, но может и не существовать. Оно может быть единственным и не единственным. Причем если оптимальное решение единственное, то оно будет базисным, а если оно не единственное, то среди этих решений обязательно имеется базисное решение, которое и находится с помощью симплексного метода. Базисное решение получается путем преобразования и разрешения исходной системы относительно основных, дополнительных или искусственных переменных. В симплексной таблице оно находится путем приравнивания коэффициентов столбца свободных членов соответствующим базисным неизвестным. При базисном решении функция L принимает базисное значение.

Заметим, что данный базис является допустимым, если после приведения системы уравнений к этому базису правые части всех уравнений не отрицательны.

4. Переход от одного допустимого базиса к другому допустимому базису представляет собой один шаг симплекс-метода (одну итерацию). Если функция $L \to \max$, то при новом улучшенном базисе $L_2 > L_1$, то есть значение этой функции должно возрастать. Если же $L \to \min$, то при улучшенном базисе $L_2 < L_1$, то есть оно должно уменьшаться. Переход от одного допустимого базиса к другому, улучшенному, и представляет собой основную идею симплексного метода.

5. Если при переходе от одного базиса к другому и последующим значение функции L остается неизменным, то такой случай называется вырожденным. Практически это означает, что в исходной системе неравенств имеется линейная взаимозависимость между строками или столбцами. В этом случае поставленную

задачу следует проанализировать и внести соответствующие корректировки в исходную систему.

6. Применяя симплекс-метод, удобно производить преобразования не самой системы уравнений, а ее расширенной матрицы, которая называется симплексной таблицей.

Осуществляя один шаг симплекс-метода, преобразуют одну симплекс-таблицу, соответствующую старому базису, в другую, соответствующую новому базису.

Если столбцы коэффициентов при базисных неизвестных в симплекс-таблице (без учета строки L) переставить в соответствующем порядке, то они образуют единичную матрицу.

7. В специальной литературе можно обнаружить различные видоизменения в оформлении симплексных таблиц. Особенно следует иметь в виду тот факт, что для практических расчетов, осуществляемых вручную, иногда применяются так называемые сокращенные симплекс-таблицы (см., например, пособие Ф. И. Карпелевича и Л. Е. Садовского), в которых столбцы коэффициентов при базисных неизвестных опущены.

Рассмотрим принцип применения таких таблиц.

Задача 3.6. Пусть требуется решить уже известную нам задачу (см. гл. 2, § 4), условия которой описываются системой (2.7) или (3.11).

Проделав преобразования (3.12)—(3.13), получим систему (3.14):

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 4000-(1{,}4x_1+x_2);\\
x_4 &= 8000-(x_1+4x_2);\\
x_5 &= -1000-(-x_2).\\
L &= 0-(-2x_1-6x_2).
\end{aligned}
$$

На основании этой системы составим не полную, как ранее, а сокращенную симплексную таблицу 6.1.

Сокращенная симплексная таблица 6.1

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	x_1	x_2
x_3	4000	1,4	1
x_4	8000	1	4
x_5	—1000	0	—1
L	0	—2	—6

Разрешающим в этой таблице будет столбец x_2, поскольку в строке L этому столбцу соответствует наибольшее по абсолютной величине значение отрицательного коэффициента (—6). Разрешающей строкой будет строка x_4, поскольку ей соответствует наименьшее отношение коэффициентов столбца свободных членов к положительным коэффициентам разрешающего столбца: $\frac{000}{1}= 4000$; $\frac{8000}{4}= 2000$. Генеральный элемент находится на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца и равен 4.

Переходим к составлению сокращенной симплексной таблицы 6.2, соблюдая следующую последовательность:

1. Неизвестные x_2 и x_4 поменять местами.

2. Элементы таблицы 6.2, стоящие в строке, соответствующей разрешающей, равны соответствующим элементам таблицы 6.1, деленным на генеральный элемент. Элемент таблицы 6.2, стоящий на месте генерального, равен единице, деленной на генеральный элемент.

3. Элементы таблицы 6.2, стоящие в столбце, соответствующем разрешающему, равны соответствующим элементам таблицы 6.1, деленным на генеральный элемент, но взятым с противоположным знаком (за исключением элемента, стоящего на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки).

4. Все остальные элементы таблицы 6.2 равны разности соответствующих элементов таблицы 6.1 и дроби, в знаменателе которой стоит генеральный элемент, а в числителе произведение элементов разрешающей строки и разрешающего столбца таблицы 6.1.

В общем случае, если из базиса выводится x_k, а вводится x_j, то элемент, стоящий на пересечении i-й строки и l-го столбца, вычисляется по формуле:

$$A^{н}_{il} = A^{с}_{il} - \frac{A_{ij} - A_{kl}}{A_{kj}} \ (i \neq k,\ l \neq j), \qquad (1)$$

где $A^{н}_{il}$ — новый коэффициент очередной симплексной таблицы, стоящей в i-ой строке и l-ом столбце.

$A^{с}_{il}$ — «старый» коэффициент предыдущей симплексной таблицы, стоящий в i-ой строке и l-ом столбце.

$(A_{ij};\ A_{kl};\ A_{kj})$ — соответственно коэффициенты предыдущей симплексной таблицы.

Эта формула приводит к легко запоминаемому «правилу прямоугольника»: для вычисления i-ого элемента l-го столбца ($A^{н}_{il}$) нужно представить в таблице 6.1 прямоугольник с вершинами в точках A^{c}_{il}; A_{ij}; A_{kj}; A_{kl}.

Значение $A^{н}_{il}$ будет получено, если из элемента, соответствующего вершине (I), вычесть дробь, в числителе которой произведение элементов, отвечающих II и IV вершинам, а в знаменателе элемент, отвечающий III вершине прямоугольника.

Проделав в соответствии с изложенной последовательностью расчеты, получим очередную симплекс-таблицу.

Сокращенная симплексная таблица 6.2

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	x_1	x_4
x_3	2 000	**1,15**	−0,25→
x_2	2 000	0,25	0,25
x_5	1 000	0,25	0,25
L	12 000	−0,5	1,50
		↑	

Поскольку в таблице 6.2 в строке L имеется отрицательный коэффициент, то решение в ней не является оптимальным. Составляем следующую симплексную таблицу аналогичным образом.

*Сокращенная симплексная таблица 6.3**

Базисные неизвестные и целевая функция	Свободные члены	x_3	x_4
x_1	1 739	0,87	−0,22
x_2	1 565	−0,22	0,30
x_5	565	−0,22	0,30
L	12 868	0,43	1,41

* Расчеты коэффициентов столбца x_3 и x_4 взяты с точностью до одной сотой, а столбца свободных членов — с точностью до одной целой.

Отсутствие в строке L симплексной таблицы 6.3 отрицательных коэффициентов является признаком оптимальности решения. Ответ: $x_1=1739$; $x_2=1565$; $x_5=565$; $L=12\,868$.

Сравнивая результаты расчета этим методом с тем, что был изложен выше, убеждаемся в их идентичности.

Задание 1. С помощью полных симплексных таблиц решите задачи с условиями 2.1—2.4.

Задание 2. Решите эти же задачи с помощью сокращенных симплексных таблиц и сравните между собой результаты расчетов в соответствии с первым заданием.

Задание 3. Используя полные или сокращенные симплексные таблицы, решите задачи 2.5—2.10, сделайте проверку выполнимости исходных ограничений и значений целевой функции.

Задание 4. Составьте самостоятельно простейшую задачу с экономической постановкой, по условными нормативами и свободными членами (задача должна иметь такие размеры: два—четыре неизвестных и два—три ограничения), запишите модель задачи, постройте полную или сокращенную симплексную таблицу, решите задачу и сделайте балансовую проверку. Если задача не решается, установите причину и внесите в условия изменения.

ГЛАВА 4
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для того чтобы понять идею и методы решения транспортной задачи линейного программирования, сформулируем и решим ряд экономических задач.

§ 1. Экономическая и математическая постановка транспортной задачи

Экономическая постановка транспортной задачи линейного программирования сводится к следующему. Из некоторых пунктов отправления надо перевезти определенное количество груза в ряд пунктов назначения. Известно, сколько груза имеется в каждом пункте отправления и сколько требуется его в каждом пункте назначения. Расстояние (или другие экономические оценки, например себестоимость перевозки единицы груза) от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения известно. Требуется определить, сколько груза необходимо перевезти и по какому маршруту, чтобы в каждый пункт назначения было доставлено требуемое количество груза, а общие затраты на его транспортировку были минимальными.

Математически задача ставится так. Имеется n поставщиков (пунктов отправления груза) и m потребителей (пунктов назначения груза). Пусть:

j — индекс поставщиков ($j=1, 2, \ldots, n$);

i — индекс потребителей ($i=1, 2, \ldots, m$);

B_j — количество груза, имеющегося у j-го поставщика;

A_i — количество груза, необходимое i-му потребителю;

x_{ij} — искомая величина перевозки груза от j-го поставщика i-му потребителю;

c_{ij} — расстояние (или себестоимость перевозки единицы груза) от j-го поставщика до i-го потребителя.

Исходя из принятых обозначений, экономико-математическая модель задачи в структурной форме будет иметь вид:

найти $L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$

при условии:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=A_i;$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=B_j;$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{m} A_i=\sum_{j=1}^{n} B_j;$$

$$4)\ x_{ij}\geqslant 0.$$

Величина L характеризует минимум затрат на транспортировку всего груза.

Первое условие означает, что общий объем груза, от каких бы пунктов его ни отправляли, в сумме обязательно должен удовлетворять спрос i-го потребителя.

Второе условие, наоборот, говорит о том, что, к каким бы пунктам назначения груз ни перевозился, его суммарная перевозка от j-го поставщика должна быть равна наличию его у этого поставщика.

Третье условие показывает, что в сумме все то, что перевозится потребителям, должно быть равно наличию груза у поставщиков. Это условие называют балансом спроса и предложения.

Четвертое условие является обязательным для всех задач линейного программирования и показывает, что величина перевезенного груза от любого поставщика любому потребителю не может быть отрицательной.

Если от сокращенной записи задачи перейти к развернутой, то условия и критерий оптимальности задачи запишутся в виде системы уравнений:

найти $L=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\to\min$

при условии:

$$\begin{aligned}
&1)\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+\ldots+x_{1n}=A_1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad\ x_{m1}+x_{m2}+x_{m3}+\ldots+x_{mn}=A_m;\\
&2)\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+\ldots+x_{m1}=B_1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad\ x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+\ldots+x_{mn}=B_n;\\
&3)\ A_1+A_2+A_3+\ldots+A_m=\\
&\quad\ =B_1+B_2+B_3+\ldots+B_n;\\
&4)\ (x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ \ldots\ x_{mn})\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Условия транспортной задачи могут быть записаны и в табличной (матричной) форме. Причем для задач небольшой размерности, когда, например, количество поставщиков равно трем-четырем, а количество потребителей — четырем-пяти, табличная форма записи является наиболее удобной. Приведем общий вид транспортной таблицы (матрицы).

Если исходные условия транспортной задачи представлены в виде уравнений, как это сделано выше, то задача называется закрытой. В закрытой задаче баланс спроса равен балансу предложения, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} A_i=\sum_{j=1}^{n} B_j.$$

Если баланс спроса не равен балансу предложения, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} A_i\gtreqless\sum_{j=1}^{n} B_j,$$

то задача называется открытой. Для того чтобы решить открытую задачу, ее следует предварительно свести к закрытой путем введения дополнительного, так называемого фиктивного поставщика или потребителя, о чем будет подробно сказано ниже.

Транспортная таблица 0.1

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	...	n	$\sum_{j=1}^{n}$
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	A_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	A_2
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	A_m
$\sum_{i=1}^{m}$	B_1	B_2	...	B_n	$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$

§ 2. Определение опорного решения

Логика нахождения оптимального варианта в транспортной задаче примерно та же, что и в симплексном методе: определяется некоторое допустимое (опорное) решение, которое путем постепенного улучшения доводится до оптимального.

Для уяснения принципов нахождения опорного и оптимального решения задачи рассмотрим простой пример.

Задача 4.1. Пусть требуется составить такой план транспортировки комбикормов от трех заводов до четырех хозяйств, чтобы хозяйства полностью получили запланированный объем комбикормов, а общие затраты на их транспортировку были минимальными. При этом известна себестоимость перевозки 1 т комбикормов от каждого завода до каждого хозяйства, задана мощность заводов и потребность хозяйств в комбикормах. Все исходные данные представлены в транспортной таблице 1.1.

Транспортная таблица 1.1

Потребители — хозяйства (i) \ Поставщики — заводы (j)	1	2	3	$\sum_{j=1}^{3}$
1	5	8	17	3 200
2	8	10	28	5 700
3	24	20	35	3 200
4	30	32	40	1 500
$\sum_{i=1}^{4}$	4800	4800	4000	13 600

В правых верхних углах клеток таблицы 1.1 проставлена себестоимость перевозки 1 т комбикормов. Например, в клетке a_{11} (первый индекс — 1 означает, что клетка принадлежит первой строке; второй индекс — 1 означает, что эта же клетка принадлежит и первому столбцу, аналогично обозначаются и другие клетки: a_{12}, a_{13}, a_{21} и т. д.) стоит оценка 5, означающая, что затраты на перевозку 1 т комбикормов от первого завода до первого хозяйства составляют 5 коп. В последней строке таблицы проставлены величины, характеризующие возможности заводов в поставке комбикормов в тоннах, а в последнем столбце — соответствующие величины, характеризующие потребность хозяйств в комбикормах. Поскольку общая мощность заводов-поставщиков равна суммарной потребности в комбикормах хозяйств, то задача закрытая.

Опорное решение транспортной задачи может быть определено с помощью различных приемов, включая произвольный выбор его. Однако следует иметь в виду, что от того, насколько оно удачно подобрано, непосредственно зависит количество промежуточных расчетов и быстрота определения оптимального решения.

Существует ряд приемов определения опорного плана, общим для которых является соблюдение правила:

количество заполненных клеток должно соответствовать величине $(m+n-1)$, где m — количество потребителей, n — количество поставщиков.

В нашем примере количество заполненных клеток должно быть равно 6, поскольку $4+3-1=6$. Это правило должно соблюдаться и во всех последующих расчетах [1].

Одним из наиболее распространенных приемов нахождения опорного решения является метод, или *правило «северо-западного угла»*. Согласно этому правилу, заполнение клеток идет по направлению от клетки a_{11} к клетке a_{mn}, то есть от левой верхней клетки (северо-западной) к правой нижней (юго-восточной). Опорный план, рассчитанный по этому правилу, представлен в транспортной таблице 1.2.

В клетке a_{11} проставлена величина 3200, то есть предполагается, что первого потребителя целиком обеспечивает первый поставщик. В клетке a_{21} проставлена величина 1600, то есть второй потребитель получает 1600 т комбикормов от первого поставщика. Эта величина получилась как разница между 4800 (наличие комбикормов у первого поставщика) и 3200 (потребность первого потребителя, которую только что удовлетворили за счет первого поставщика). Аналогичным образом заполняем остальные клетки таблицы.

Суммарные затраты на транспортировку груза в этом случае составят:

$$(3200\cdot 5)+(1600\cdot 8)+(4100\cdot 10)+(700\cdot 20)+$$
$$+(2500\cdot 35)+(1500\cdot 40)=2313 \text{ руб.}$$

Пользуясь правилом «северо-западного угла», можно довольно легко построить опорный план. Однако это правило лишено экономического обоснования и в этом его недостаток. Поэтому разработаны другие приемы построения опорного плана, в основу которых положена идея закрепления поставщиков за потребителями по

[1] Если это правило не соблюдается, то план будет вырожденным. Для того чтобы избежать этого, возможны два простых пути: или заново сделать перераспределение, или же просто предположить, что в некоторой пустой клетке мы имеем бесконечно малую (или просто нулевую) поставку, а значит, можно считать такую клетку занятой. В дальнейшем ради упрощения мы будем рассматривать только тот случай, когда вырожденности не имеется или вырожденность уже преодолена.

принципу наименьшего расстояния или наименьших затрат на перевозку груза.

Правило «минимума по строке». Согласно этому правилу, заполнение клеток в транспортной таблице осуществляется по строкам, начиная с первой и кончая последней. Причем в каждой строке максимально возможная величина груза проставляется в ту клетку, оценка которой наименьшая.

Транспортная таблица 1.2

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	$\sum_{j=1}^{3}$
1	3200 [5]	[8]	[17]	3 200
2	1600 [8]	4100 [10]	[23]	5 700
3	[24]	700 [20]	2500 [35]	3 200
4	[30]	[32]	1500 [40]	1 500
$\sum_{i=1}^{4}$	4800	4800	4000	13 600

Рассмотрим первую строку транспортной таблицы 1.2. Наименьшая оценка затрат находится в клетке a_{11}. Значит, в эту клетку следует проставить максимально возможную поставку — 3200. В этом случае первый потребитель обеспечивается полностью. Переходим к следующей строке. Наименьшая оценка относится в клетке a_{21}, значит, в эту клетку следует поставить величину 1600 (4800—3200). Поскольку второй потребитель еще не полностью обеспечен грузом, то выбираем из оставшихся в этой строке ту клетку, оценка которой наименьшая. Это будет клетка a_{22} с оценкой 10. Проставляем в эту клетку величину 4100. Аналогичным образом заполняем и остальные клетки.

Правило «минимума по столбцу». По этому правилу заполнение клеток осуществляется по столбцам, начиная с той клетки первого столбца, оценка которой минимальная. Правило «минимума по столбцу» подобно правилу «минимума по строке». В обоих случаях распределение поставок осуществляется последовательно, начиная с первого поставщика или потребителя, а заполнение клеток в транспортной таблице — начиная с клетки с минимальной оценкой первой строки (если применяется правило «минимума по строке») или первого столбца (если применяется правило «минимума по столбцу»). Достоинством этих приемов является принцип экономического обоснования опорного плана, увязка балансовых соотношений внутри транспортной таблицы при этом облегчается, а опорный план в этих случаях, как правило, более близок к оптимальному, чем, например, при методе «северо-западного угла».

Правило «минимального элемента». Согласно этому правилу, составление опорного плана начинается с той клетки (a_{ij}) таблицы, оценка которой (c_{ij}) наименьшая. В эту клетку проставляется максимально возможная величина груза. После этого находится другая клетка, имеющая наименьшую оценку среди оставшихся клеток таблицы, и в нее проставляется максимально возможная величина поставки и т. д. Достоинством данного приема прежде всего является относительная близость получаемого опорного плана к оптимальному, недостатком — сложность балансовых увязок, поскольку правило последовательности обеспечения потребителей или перевозки груза от поставщиков здесь не соблюдается.

Различные приемы составления опорного плана, как правило, ведут к неодинаковой эффективности этих планов, различной близости их к оптимальному решению. Заранее трудно определить, какой прием более эффективный. В отдельных случаях, как, например, в задаче 4.1, применение любого из этих приемов приводит к одному и тому же опорному плану. Однако это встречается крайне редко.

Рассмотрим принцип построения опорного плана с помощью этих приемов на небольшой задаче, условия которой представлены в транспортной таблице 2.1.

Задача 4.2. Требуется составить опорный план по правилам «северо-западного угла», «минимума по строке», «минимума по столбцу» и «минимального элемента» и сравнить, какой из опорных планов ближе к оптимальному.

Исходная транспортная таблица 2.1

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	4	$\sum_{j=1}^{4}$
1	3	4	2	2	40
2	5	5	1	6	40
3	2	6	3	8	70
$\sum_{i=1}^{3}$	30	30	60	30	150

В соответствии с рассмотренными выше приемами построения опорного плана составим четыре варианта такого плана и сравним их эффективность с точки зрения минимума величины критерия оптимальности

$$(L = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij} \to \min).$$

Транспортная таблица 2.2

Опорный план, построенный по правилу «северо-западного угла»

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	4	$\sum_{j=1}^{4}$
1	30 [3]	10 [4]	[2]	[2]	40
2	[5]	20 [5]	20 [1]	[6]	40
3	[2]	[6]	40 [3]	30 [8]	70
$\sum_{i=1}^{3}$	30	30	60	30	150

$$L_1 = (30 \cdot 3) + (10 \cdot 4) + (20 \cdot 5) + (20 \cdot 1) + (40 \cdot 3) + (30 \cdot 8) = 610.$$

Транспортная таблица 2.3

Опорный план, построенный по правилу «минимума по строке»

Потребители (i) \ Поставщики (j)	1	2	3	4	$\sum_{j=1}^{4}$
1	[3]	[4]	40 [2]	[2]	40
2	[5]	20 [5]	20 [1]	[6]	40
3	30 [2]	10 [6]	[3]	30 [8]	70
$\sum_{i=1}^{3}$	30	30	60	30	150

$$L_2 = (40\cdot 2) + (20\cdot 5) + (20\cdot 1) + (30\cdot 2) + (10\cdot 6) + (30\cdot 8) = 560.$$

Транспортная таблица 2.4

Опорный план, построенный по правилу «минимума по столбцу»

Потребители (i) \ Поставщики (j)	1	2	3	4	$\sum_{j=1}^{4}$
1	[3]	30 [4]	10 [2]	[2]	40
2	[5]	[5]	40 [1]	[6]	40
3	30 [2]	[6]	10 [3]	30 [8]	70
$\sum_{i=1}^{3}$	30	30	60	30	150

$$L_3 = (30\cdot 2) + (30\cdot 4) + (40\cdot 1) + (10\cdot 2) + (10\cdot 3) + (30\cdot 8) = 510.$$

Сравнивая величины L_1, L_2, L_3, L_4, приходим к выводу, что в данном случае наиболее далек от оптимального опорный план, построенный по правилу «северо-западного угла» ($L_1=610$), а наиболее близок план, построенный по правилу «минимального элемента» ($L_4=440$).

Транспортная таблица 2.5

Опорный план, построенный по правилу «минимального элемента»

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	4	$\sum_{j=1}^{4}$
1	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	20 $\boxed{2}$	20 $\boxed{2}$	40
2	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	40 $\boxed{1}$	$\boxed{6}$	40
3	30 $\boxed{2}$	30 $\boxed{6}$	$\boxed{3}$	10 $\boxed{8}$	70
$\sum_{i=1}^{3}$	30	30	60	30	150

$$L_4=(40\cdot 1)+(20\cdot 2)+(20\cdot 2)+(30\cdot 2)+(30\cdot 6)+(10\cdot 8)=440.$$

Для того чтобы доказать, является ли построенный план оптимальным, разработан ряд методов. С точки зрения определения наиболее точного оптимального решения эти методы не равноценны: одни — точные, другие — приближенные, одни — более простые, другие — сложнее. Рассмотрим один из наиболее широко распространенных точных методов — так называемый метод потенциалов.

§ 3. Метод потенциалов

Идея этого метода заключается в том, что для проверки опорного плана на оптимальность определяется ряд чисел, называемых потенциалами. Сравнение этих потенциалов с оценками клеток транспортной таблицы и лежит в основе признака оптимальности решения задачи.

Под потенциалами подразумевается произвольная система чисел, рассчитанных по правилу: для всех $(m+n-1)$ заполненных клеток транспортной таблицы сумма потенциалов соответствующей строки и столбца должна равняться величине оценки этой клетки, то есть:

$$c_{ij}=\alpha_i+\beta_j. \qquad \text{(I)}$$

Общее количество потенциалов должно равняться величине $(m+n)$, поскольку потеницалы определяются для каждого поставщика и потребителя, а количество заполненных клеток в таблице, как указывалось выше, должно быть равно величине $(m+n-1)$ или на единицу меньше числа потенциалов. Поэтому на первом этапе расчета одному любому потенциалу разрешается придавать произвольное значение. Для удобства проведения расчетов рекомендуется потенциалу первой строки или первого столбца придавать нулевое значение.

Проиллюстрируем принцип расчета потенциалов для опорного плана задачи 4.1 (см. транспортную табл. 1.2). Итак, пусть α_1 (потенциал первой строки) равен нулю. Находим в этой строке заполненную клетку (a_{11}) с величиной поставки, равной 3200. Оценка этой клетки (c_{11}) равна 5. Значит, на основании формулы (I) можно определить потенциал (β_1). Подставив в формулу (1) значения c_{11} и α_1, получим: $\beta_1=5-0=5$. Значение потенциала β_1 используем для определения других потенциалов. На пересечении первого столбца и второй строки имеется заполненная клетка a_{21} с поставкой 1600, $c_{21}=8$. Значит, можно определить потенциал α_2 ($\alpha_2=8-5=3$). Аналогичным образом определяем остальные потенциалы: $\beta_2=10-3=7$; $\alpha_3=20-7=13$; $\beta_3=35-13=22$; $\alpha_4=40-22=18$.

Значения потенциалов удобнее записывать прямо в соответствующей таблице, для чего справа добавляется еще один столбец, а снизу — строка.

В нашей задаче транспортная таблица с опорным планом и рассчитанными потенциалами будет выглядеть так (табл. 1.3).

В нижнюю правую клетку таблицы 1.3 занесем ранее определенную величину $L=2313$ руб. Рассчитанные значения потенциалов (α_i и β_j) необходимы нам для того, чтобы доказать оптимальность составленного опорного плана.

Признак оптимальности решения задачи. Если $L\to\min$ и для всех $[(m\cdot n)-(m+n-1)]$ незаполненных клеток допустимого решения транспортной задачи окажется, что

$$c_{ij} \geqslant \alpha_i + \beta_j, \tag{II}$$

то полученный план считается оптимальным.

Иными словами, если окажется, что все пустые клетки в транспортной таблице, содержащей допустимый план, удовлетворяют формуле (II), то план считается оптимальным. И наоборот, наличие хотя бы одной пустой клетки, не удовлетворяющей формуле (II), есть признак неоптимальности решения задачи.

*Транспортная таблица 1.3**

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	$\sum\limits_{j=1}^{3}$	α_i
1	− 5 3200	8	+ 17 ×	3 200	0
2	+ 8 1600	− 10 4100	28	5 700	3
3	24	+ 20 700	− 35 2500	3 200	13
4	30	32	40 1500	1 500	18
$\sum\limits_{i=1}^{4}$	4800	4800	4000	13 600	
β_j	5	7	22		$L=2313$

* Смысл стрелочек и других обозначений внутри таблицы будет ясен из дальнейшего.

В транспортной таблице 1.3 имеется одна клетка (a_{13}), не удовлетворяющая формуле (II). В этой клетке $c_{13} < \alpha_1 + \beta_3$, поскольку $17 < 0 + 22$. Значит, план, представленный в таблице 1.3, неоптимальный. Клетка a_{13} условно считается «плохой», в таблице 1.3 она помечена крестиком.

Для того чтобы улучшить опорный план, в эту клетку следует сделать поставку, то есть необходимо, чтобы первый потребитель обязательно получал груз (пока еще не известно, в каком количестве) от третьего поставщика.

Для перехода от одного плана к другому, более эффективному, разработан специальный прием «замкнутого маршрута».

§ 4. Улучшение решения транспортной задачи по правилу замкнутого маршрута

Суть данного правила сводится к тому, что некоторая часть груза перераспределяется между заполненными клетками и «плохой» клеткой (в нашем примере клетка a_{13}). Перераспределение осуществляется по некоторому контуру (маршруту), охватывающему часть клеток или все заполненные и «плохую» клетки.

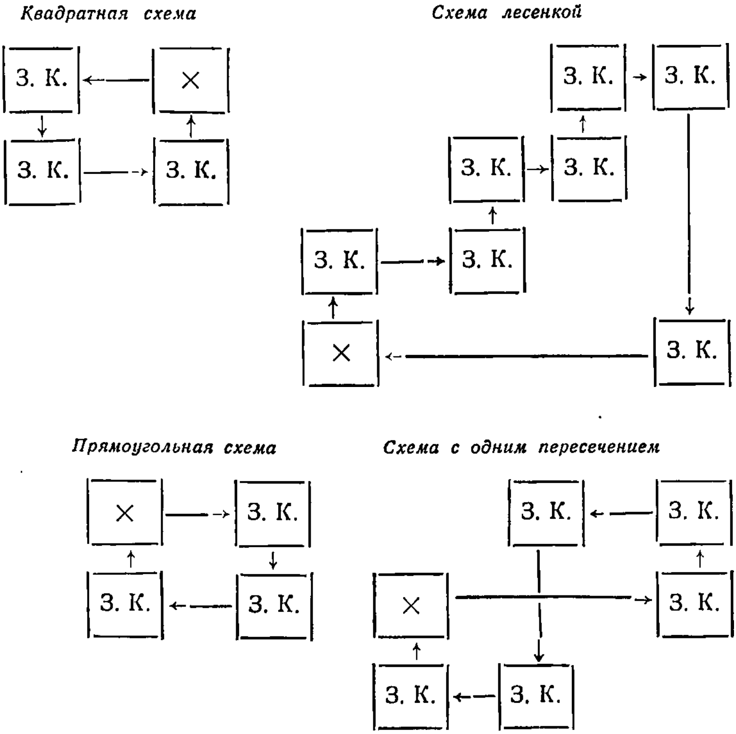
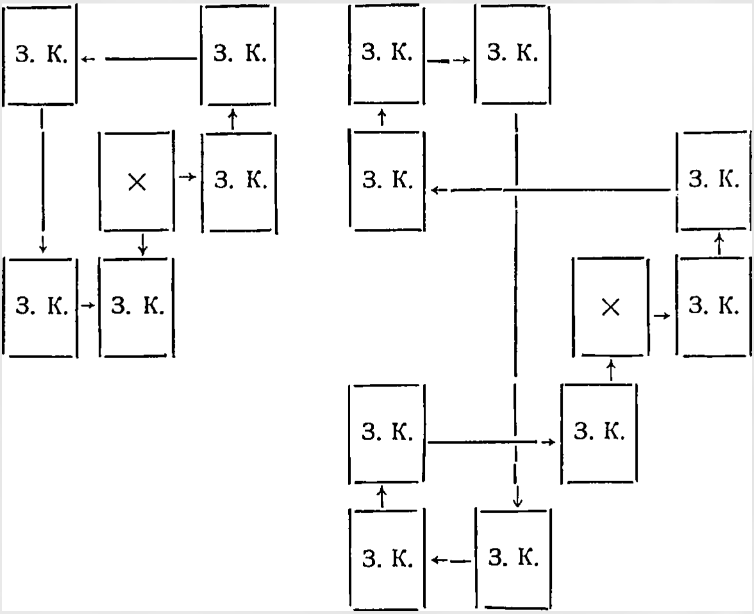


Рис. 2. Типичные схемы замкнутого маршрута.

Круговая схема
(с одним выступом)

Схема с несколькими пересечениями



Условные обозначения: →— направление маршрута; |З. К.|— заполненные клетки; |×| — «плохая» клетка.

Рис. 2. (Продолжение). Типичные схемы замкнутого маршрута.

Для построения замкнутого маршрута необходимо, чтобы:

1) маршрут начинался и кончался в «плохой» клетке;

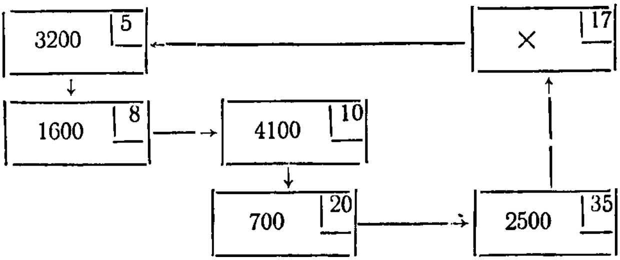
2) в углах поворота маршрута обязательно находились заполненные клетки;

3) переход от одной клетки к другой осуществлялся по горизонталям и вертикалям (строкам и столбцам). Угловые (диагональные) переходы запрещены.

Конфигурация маршрута может быть самой различной, но необходимо стремиться к тому, чтобы маршрут был наиболее простым.

Приведем несколько типичных схем замкнутого маршрута (рис. 2).

Применительно к нашей задаче построение замкнутого маршрута возможно лишь по такой схеме[1]:



Перераспределение поставок по замкнутому маршруту. Принцип перераспределения груза по замкнутому маршруту осуществляется следующим образом.

1. В угловых клетках маршрута, начиная с «плохой» клетки, проставляются знаки плюс (+) и минус (—). Причем «плохой» клетке придается знак плюс, а все остальные знаки чередуются по контуру маршрута.

Знаки проставляются для того, чтобы можно было ориентироваться, к каким клеткам следует прибавлять перераспределяемую величину груза и от каких клеток вычитать ее.

2. Среди клеток, имеющих знак минус, отыскивается та, которая содержит минимальную величину поставки. Эта величина и является искомым объемом груза, который необходимо перераспределить для получения нового, более эффективного плана. Минимальная величина поставки выбирается для того, чтобы в новом плане не получилось отрицательных поставок, что запрещено по условию задачи.

3. Найденная в отрицательных клетках минимальная величина поставки перераспределяется по контуру маршрута. Причем в клетках, имеющих знак плюс, перераспределяемая величина поставки прибавляется к уже имеющимся в них величинам, а в клетках со знаком минус эта величина соответственно вычитается. После того как эта операция будет проделана, заканчивается один цикл пересчетов, приводящий к новому, более эффективному плану.

---

[1] Для наглядности между клетками в схеме маршрута сделан разрыв и проставлены стрелочки, хотя в транспортной таблице 1.3. заполненные клетки расположены вплотную.

Возвратимся к задаче 4.1. После того как построили маршрут перераспределения, необходимо проставить знаки по его контуру. Придаем «плохой» клетке знак плюс, а все остальные знаки в угловых клетках маршрута будем чередовать по направлению маршрута, то есть при первом повороте маршрута в занятой клетке (a_{11}) этой клетке придается знак минус, клетке a_{12} знак плюс и т. д.

После того как проставили знаки плюс и минус, среди клеток со знаком минус выбираем ту, в которой величина поставки наименьшая. В данном случае это клетка a_{33} с поставкой 2500. Величину этой поставки будем перераспределять по контуру маршрута. В таблице 1.3 эта цифра выделена жирным шрифтом. Перераспределив 2500 по контуру маршрута без учета промежуточных клеток (a_{12} и a_{23}) и произведя сложение этой величины с объемом поставок в клетках со знаком плюс и вычитание с объемами поставок в клетках, имеющих знак минус, получим новый вариант плана (табл. 1.4). Поставки, которые не были охвачены маршрутом перераспределения, переносятся в те же клетки новой таблицы.

Транспортная таблица 1.4

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	$\sum_{j=1}^{3}$	α_i
1	700 | 5	8	2500 | 17	3200	0
2	4100 | 8	1600 | 10	28	5700	3
3	24	3200 | 20	35	3200	13
4	30	32	1500 | 40	1500	23
$\sum_{i=1}^{4}$	4800	4800	4000	13600	
β_j	5	7	17		L-2188

Подсчитаем значение величины L при новом варианте решения задачи:

$$L=(700\cdot5)+(2500\cdot17)+(4100\cdot8)+(1600\cdot10)+$$
$$+(3200\cdot20)+(1500\cdot40)=3500+42\,500+32\,800+$$
$$+16\,000+64\,000+60\,000=218\,800, \text{ то есть } L=2188 \text{ руб.}$$

Вновь полученное значение величины L, как и ранее, занесем в нижнюю правую клетку таблицы 1.4. Сравнивая новый вариант плана с предыдущим, видим, что экономия на транспортных издержках составит 125 руб. $(2313-2188=125)$. Ясно, что план, представленный в таблице 1.4, является более эффективным. Но необходимо знать, является ли этот план оптимальным или и его можно улучшить? Вновь обращаемся к потенциалам. В соответствии с формулой (I) построим систему потенциалов, придав, как и ранее, потенциалу первой строки нулевое значение.

Итак, $\alpha_1=0$; $\beta_1=5-0=5$; $\beta_3=17-0=17$; $\alpha_2=8-5=3$; $\beta_2=10-3=7$; $\alpha_3=20-7=13$; $\alpha_4=40-17=23$.

Занесем значения потенциалов в таблицу 1.4. Применяя формулу (II), проверим данный план на оптимальность. Поскольку во всех клетках $c_{ij}>\alpha_i+\beta_j$ $[(8>7+0;\ 28>3+17;\ 24>13+5;\ 35>17+13;\ 30>23+5;\ 32>23+7)]$, то план, представленный в ней, считается оптимальным, а задача решенной.

Для более прочного усвоения принципа решения транспортной задачи с помощью потенциалов определим оптимальный вариант в задаче 4.2. Ранее было доказано, что опорный план, построенный по правилу «минимального элемента», в данном случае является наиболее эффективным. Теперь требуется доказать оптимальность этого плана, а в том случае, если он окажется не оптимальным, улучшить его.

На основе транспортной таблицы 2.5 составим транспортную таблицу 2.6, в которую занесем значения потенциалов α_i и β_j, рассчитанные по формуле (I).

Проверим план, представленный в таблице 2.6 на оптимальность, используя формулу (II). Обнаруживаем, что клетка a_{33} не отвечает критерию оптимальности, поскольку ее оценка $3<6+2$. Значит, план в таблице 2.6 неоптимальный и его надо улучшить.

Построим маршрут перераспределения и занесем его в таблицу 2.6. Маршрут перераспределения довольно простой, имеет прямоугольную схему. и проходит через следующие клетки: $a_{33} \longrightarrow a_{13} \longrightarrow a_{14} \longrightarrow a_{34} \longrightarrow a_{33}$.

Может он проходить и наоборот — по тому же маршруту, но в обратном направлении (против часовой стрелки).

Транспортная таблица 2.6

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	4	$\sum_{j=1}^{4}$	α_i
1	3	4	− 20	2	+ 20	2	40	0
2	5	5	40	1	6	40	−1
3	30	2	30	6	+ ×	3	− 10	8	70	6
$\sum_{i=1}^{3}$	30	30	60	30	150	
β_j	−4	0	2	2		$L_4=440$

По контуру маршрута проставляем знаки плюс и минус, начиная с плохой клетки (a_{33}), которой придается знак плюс. Среди клеток с минусом выбираем ту, поставка в которой наименьшая. Это будет клетка a_{34} с поставкой 10. Перераспределив эту поставку (10) по контуру маршрута, получим новый план, который занесем в таблицу 2.7.

Значение функции (L_5) при этом плане будет равно 390, то есть экономия по сравнению с предыдущим планом составит 50 единиц. Но несмотря на то, что мы получили улучшенный вариант решения задачи, необходимо вновь убедиться в том, что он является оптимальным.

Снова строим систему потенциалов, используя формулу (I) и придав $\alpha_1=0$. После этого, используя формулу (II), проверим план в таблице 2.7 на оптимальность. Обнаруживаем, что все пустые клетки этой таблицы, за исключением клетки a_{12}, удовлетворяют требованию оптимальности. Оценка этой клетки меньше суммы соответствующих потенциалов ($4<0+5$), значит, план в таблице 2.7 еще неоптимальный.

Транспортная таблица 2.7

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	4	$\sum_{j=1}^{4}$	α_i
1	[3]	+ × [4]	− 10 [2]	[2]	40	0
2	[5]	[5]	40 [1]	[6]	40	−1
3	30 [2]	−30 [6]	+ 10 [3]	[8]	70	1
$\sum_{i=1}^{3}$	30	30	60	30	150	
β_j	1	5	2	2		$L_5=390$

Составляем маршрут перераспределения, который проходит через клетки: $a_{12}\longrightarrow a_{13}\longrightarrow a_{33}\longrightarrow a_{32}\longrightarrow a_{12}$. Проставляем знаки плюс и минус и находим величину перераспределения груза — 10. Перераспределив эту величину, построим новый план, который занесем в транспортную таблицу 2.8.

Значение функции L_6 в этом плане будет равно 380, то есть экономия по сравнению с предыдущим планом составит еще 10 единиц. Необходимо опять рассчитать систему потенциалов, чтобы проверить и этот план на оптимальность. Проделав это, обнаруживаем, что все пустые клетки таблицы 2.8 подходят под критерий оптимальности, ибо их оценки (c_{ij}) больше суммы потенциалов ($\alpha_i+\beta_j$) или равны ей.

Мы убедились, что в этой транспортной таблице план оптимальный, задача решена. Ответ непосредственно берется из последней транспортной таблицы и в данном случае оптимальное решение будет следующим.

Первому потребителю надо везти 10 единиц груза от второго поставщика и 30 единиц от четвертого. Второму потребителю все 40 единиц следует везти от третьего поставщика. Третьему потребителю — 30 единиц от первого поставщика, 20 от второго и 20 от третьего. Затраты на транспортировку при этом будут минимальны и составят 380 единиц.

Транспортная таблица 2.8

Поставщики (j) / Потребители (i)	1	2	3	4	$\sum\limits_{j=1}^{4}$	α_i
1	$\boxed{3}$	10 $\boxed{4}$	$\boxed{2}$	30 $\boxed{2}$	40	0
2	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	40 $\boxed{1}$	$\boxed{6}$	40	−1
3	30 $\boxed{2}$	20 $\boxed{6}$	20 $\boxed{3}$	$\boxed{8}$	70	2
$\sum\limits_{i=1}^{3}$	30	30	60	30	150	
β_j	0	4	1	2		$L_6=380$

§ 5. Транспортная задача, в которой целевая функция стремится к максимуму

В большинстве транспортных задач требуется определить минимум целевой функции. Однако существуют аналогичные задачи, в которых требуется определить максимальное значение целевой функции.

Покажем на небольшом примере принцип решения транспортной задачи, когда требуется, чтобы целевая функция достигала своего максимального значения.

Задача 4.3. Имеется три сорта озимой пшеницы: Мироновская 808, Безостая 1 и Аврора. Мироновская 808 возделывается на площади 1000 га, Безостая 1 — на площади 600 га и Аврора — на площади 400 га. Средняя многолетняя урожайность этих сортов по различным предшественникам известна.

Площадь чистых паров в хозяйстве составляет 800 га, кукурузы на силос — 400 га, многолетних трав на сено — 600 га, бобовых — 200 га.

Таблица 3.1

Средняя многолетняя урожайность различных сортов озимой пшеницы по предшественникам (ц/га)

Предшественники	Сорта пшеницы		
	Мироновская 808	Безостая 1	Аврора
Чистый пар	30	28	25
Кукуруза на силос	28	26	24
Многолетние травы на сено	26	24	23
Бобовые	28	30	22

Требуется составить такой план размещения озимой пшеницы по предшественникам, чтобы валовой сбор ее был максимальным.

Решение задачи. Составляем исходную транспортную таблицу, в которую заносим всю информацию, характеризующую условия задачи. Принцип составления этой таблицы остается таким же, как и ранее, с той лишь разницей, что вместо поставщиков здесь сорта пшеницы, а вместо потребителей — предшественники.

Транспортная таблица 3.2

Сорта пшеницы (j) / Предшественники (i)	Мироновская 808	Безостая 1	Аврора	$\sum_{j=1}^{3}$	α_i
1. Чистый пар	800 [30]	[28]	[25]	800	0
2. Кукуруза на силос	200 [28]	200 [26]	[24]	400	—2
3. Многолетние травы на сено	[26]	— 400 [24]	+ 200 [23]	600	—4
4. Бобовые	× [28]	+ × 30	— 200 [22]	200	—5
$\sum_{i=1}^{4}$	1000	600	400	200	
β_j	30	28	27		$L_1 =$ 51100

После составления расчетной таблицы переходим к построению начального варианта плана. Поскольку функция L в нашей задаче должна стремиться к максимуму, то, очевидно, начать составление опорного плана следует, ориентируясь не на минимальные оценки, как ранее, а на максимальные. Будем придерживаться, например, правила «максимума по строке». Просматривая величины урожайности различных сортов озимой пшеницы по чистому пару, видим, что наибольшую урожайность дает Мироновская 808. Значит, в клетку a_{11} (с урожайностью в 30 ц) поместим величину, равную 800. Переходим ко второму предшественнику. В клетку a_{12} (с урожайностью в 28 ц) поместим величину 200, а остальные 200 — в клетку a_{22} (с урожайностью в 26 ц). Переходим к третьему предшественнику. В клетку a_{32} (с урожайностью в 24 ц) помещаем 400 $(600-200=400)$, а оставшиеся 200 помещаем в клетку a_{33}. Переходим к последнему предшественнику. Здесь выбора нет, в клетку a_{43} помещаем 200.

Итак, у нас все балансы соблюдены, а количество заполненных клеток, как и ранее, равно величине $(m+n-1)$.

Подсчитаем, сколько же мы соберем, если будем придерживаться данного плана: $L_1=(800\cdot30)+(200\cdot28)+$

$$+(200\cdot26)+(400\cdot24)+(200\cdot23)+(200\cdot22)=$$
$$=24\,000+5600+5200+9600+4300+4400=53\,100.$$

Переходим к расчету системы потенциалов. Принцип расчета их аналогичен ранее изложенному (формула I).

Потенциалу первой строки, как и ранее, придадим нулевое значение, то есть $\alpha_1=0$, тогда $\beta_1=30-0=30$; $\alpha_2=28-30=-2$; $\beta_2=26-(-2)=28$; $\alpha_3=24-28=-4$; $\beta_3=23-(-4)=27$; $\alpha_4=22-27=-5$.

Значения потенциалов заносим в таблицу 3.2 и приступаем к проверке на оптимальность опорного плана. Но здесь уже будет совсем другой, диаметрально противоположный признак оптимальности:

если величина $L\to\max$ и для всех $[m\cdot n-(m+n-1)]$ пустых клеток транспортной таблицы справедлива формула:

$$c_{ij}\leqslant\alpha_i+\beta_j, \qquad \text{(III)}$$

то план считается оптимальным. Наличие хотя бы одной клетки, противоречащей формуле (III), является признаком неоптимальности решения.

В таблице 3.2 план неоптимальный, поскольку имеется две клетки (a_{41} и a_{42}), значение урожайности в которых (c_{ij}) больше суммы потенциалов соответствующих строк и столбцов: $28>30+(-5)$ и $30>28+(-5)$. В таблице 3.2 эти клетки помечены крестиками.

Для того, чтобы улучшить опорный план, необходимо его пересмотреть. Причем в выделенных клетках, как и ранее, должны стоять некоторые положительные значения. Выберем одну из этих («плохих») клеток. Лучше взять ту, где оценка урожайности наибольшая,— клетку a_{42} с $c_{42}=30$.

Переходим к составлению маршрута перераспределения. Принцип составления такого маршрута полностью совпадает с изложенным выше.

Выберем среди отрицательных клеток по контуру маршрута (клетки a_{32} и a_{43}) ту, в которой стоит наименьшая величина площади посева. Это будет клетка a_{43} с площадью посева 200 га. Будем эту величину (200) перераспределять по контуру маршрута, то есть в клетку a_{33} эту величину прибавим к имеющейся ранее ($200+200=400$), в клетке a_{32} произведем вычитание этой величины от имеющейся ($400-200=200$) и т. д.

Получим новый вариант плана, который представлен в таблице 3.3.

Подсчитаем значение L при новом плане размещения посевов:

$$L_2=(800\cdot30)+(200\cdot28)+(200\cdot26)+(200\cdot24)+$$
$$+(400\cdot23)+(200\cdot30)=24\,000+5600+5200+$$
$$+4800+9200+6000=54\,800.$$

В данном случае L_2 на 1700 ц больше, чем L_1.

То, что второй вариант плана лучше первого, не вызывает сомнения. Однако требуется доказать, является ли этот план оптимальным.

Переходим к расчету потенциалов, придав $\alpha_1=0$. Получим следующую систему потенциалов: $\beta_1=30-0=30$; $\alpha_2=28-30=-2$; $\beta_2=26-(-2)=28$; $\alpha_3=24-28=-4$; $\beta_3=23-(-4)=27$; $\alpha_4=30-28=2$. Значения потенциалов запишем в транспортную таблицу 3.3.

Используя формулу (III), проверяем план на оптимальность. Убеждаемся, что значение c_{ij} во всех пустых клетках меньше или в крайнем случае равно сумме потенциалов соответствующих строк и столбцов, то есть формула (III) — признак оптимальности решения — соблюдается. Значит, мы получили оптимальный вариант размещения посевов пшеницы по предшественникам. По этому плану следует 800 га посевов пшеницы Мироновская 808 разместить по чистому пару, а 200 — после кукурузы на силос; 600 га Безостой 1 поровну разделить между тремя предшественниками: кукурузой на силос, многолетними травами и бобовыми; 400 га Авроры посеять после многолетних трав. При таком размещении посевов max $L=54\,800$ ц.

Транспортная таблица 3.3

Сорта пшеницы (j) / Предшественники (i)	Мироновская 808	Безостая 1	Аврора	$\sum_{j=1}^{3}$	α_i
1. Чистый пар	800 [30]	[28]	[25]	800	0
2. Кукуруза на силос	200 [28]	200 [26]	[24]	400	—2
3. Многолетние травы	[26]	200 [24]	400 [23]	600	—4
4. Бобовые	[28]	200 [30]	[22]	200	2
$\sum_{i=1}^{4}$	1000	600	400	2000	
β_j	30	28	27		$L_2=$ 54800

§ 6. Метод аппроксимации и его применение для решения транспортных задач

Возникает естественный вопрос, а нельзя ли сделать так, чтобы было поменьше промежуточных расчетов при переходе от базисного, неоптимального, плана к оптимальному? При решении задачи на электронно-вычислительной машине этот вопрос не ставится, поскольку машина довольно быстро выдает оптимальное решение, однако, если задача выполняется вручную, он приобретает важное значение, так как от этого зависит трудоемкость и быстрота решения задач.

Сразу же отметим, что существуют методы, которые позволяют уже при построении опорного решения добиться высокой близости его к оптимальному, а в ряде случаев и сразу получить оптимальное решение. Рассмотрим один из них, так называемый метод аппроксимации.

Автором этого метода является американский математик У. Фогель, который разработал его применительно к решению ряда практических задач, в том числе и для оптимизации грузоперевозок. Этот метод называют по-разному: метод У. Фогеля, метод аппроксимации У. Фогеля или просто метод аппроксимации. Смысл его рассмотрим на примере решения задачи 4.4.

Задача 4.4. Предположим, что в хозяйстве имеется 3 силосные траншеи, расположенные в разных местах и на различном расстоянии до 3 ферм. В траншеях заготовлено 1200 т силоса, в том числе: на I — 600 т, II — 200 т, III — 400 т. Сезонные потребности ферм в силосе составляют: I — 250 т, II — 400 т, III — 550 т.

Требуется определить оптимальный вариант перевозки силоса от траншеи к фермам, чтобы общие затраты на его транспортировку были минимальными. Затраты на перевозку 1 т силоса от каждой траншеи до конкретной фермы известны (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Затраты на перевозку 1 т силоса (коп.)

Траншеи	Фермы		
	I	II	III
I	5	6	8
II	6	9	7
III	9	7	10

Решим данную задачу с помощью метода аппроксимации. Как и в методе потенциалов, нам необходимо построить расчетную таблицу, которая будет иметь некоторые отличия — в ней будет еще одна строка и один столбец, которые потребуются нам для дополнительных расчетов.

Определим для каждой строки и каждого столбца таблицы разницу между двумя наименьшими оценками эффективности. Назовем их разностями первого порядка. Так, в первой строке наименьшие оценки 5 и 6. Разница между ними равна единице. Эту единицу запишем в правый столбец таблицы в соответствующую клеточку. Аналогично определим все другие разности первого порядка для каждой траншеи и фермы (или в общем случае для строки и столбца).

Транспортная таблица 4.2

Траншеи		Фермы			$\sum_{j=1}^{3}$	Разности по строке	
		I	II	III		I	II
I		5 250	6	8 350	600	1	3
II		6	9	7 200	200	1	3
III		9	7 400	10 50	450	2	3
$\sum_{i=1}^{3}$		250	400	600	1250		
Разности по столбцу	I	1	1	1			
	II	4		3			

Выберем среди всех разностей (по строке и столбцу) наибольшую — 2. В той строке или столбце, где имеется эта наибольшая разность, необходимо найти клетку с наименьшей оценкой эффективности. У нас наибольшая разность первого порядка в третьей строке равна 2, а клетка с минимальной оценкой эффективности в этой строке равна 7. Значит, в эту клетку и следует занести максимально возможную поставку (400).

Далее необходимо найти следующую максимальную разность среди оставшихся. У нас все оставшиеся разности равны между собой (в столбце и строке разностей стоят единицы). Тогда следует рассчитать так называемые вторые разности — между первой и третьей наименьшими оценками эффективности. При этом второй столбец в расчет не принимается, так как на первом этапе мы второй ферме запланировали перевозки 400 т силоса от третьей траншеи. Разности второго порядка также запишем в соответствующую строку и столбец.

Среди вторых разностей найдем максимальную — 4, которая принадлежит первому столбцу. Находим в этом столбце клетку с минимальной оценкой — клетка a_{11} с оценкой 5. В эту клетку направляем максимальную поставку — 250. Занесем эту величину в соответствующую клетку таблицы 4.2.

Все остальные поставки в данной задаче распределяются однозначно, с соблюдением ограничения по наличию и потребности силоса.

От первой траншеи оставшиеся 350 т силоса следует везти на третью ферму. Двести тонн из второй траншеи следует везти на третью ферму и оставшиеся в третьей траншее 50 т следует везти на эту же (третью) ферму.

Метод аппроксимации в соответствии с названием и сущностью является приближенным. Поэтому проверку оптимальности рассчитанного по нему плана и его улучшение следует производить с помощью другого точного метода, например, с помощью метода потенциалов.

Рассмотрим другую задачу, большую по размерам и в которой оптимальное решение определить сразу значительно сложнее.

Задача 4.5. Заготовленное в хозяйстве сено сконцентрировано на четырех пунктах, которые условно назовем А, В, С и Д. В пункте А имеется 1000 т сена, в пункте В — 6000 т, в пункте С — 1200 и в пункте Д — 1800 т.

В хозяйстве имеется четыре фермы крупного рогатого скота, расположенных в различных отделениях. Потребность ферм в сене в стойловый период в соответствии с оптимальными рационами и поголовьем скота: первой необходимо 2000 т, второй — 3000 т, третьей — 3500 т и четвертой — 1500 т.

Себестоимость перевозки 1 т сена от пунктов заготовки до ферм известна (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Себестоимость перевозки 1 т сена (коп.)

Пункты хранения сена	Фермы			
	I	II	III	IV
А	50	40	20	15
Б'	20	12	11	7
С	22	15	10	9
Д	28	10	6	4

Требуется определить оптимальный вариант транспортировки сена от пунктов его хранения до ферм, чтобы общие затраты на его транспортировку для хозяйства были минимальными.

Задачу будем решать с помощью метода аппроксимации, а проверку оптимальности решения проведем с помощью метода потенциалов.

Итак, в соответствии с уже известной нам последовательностью решения задачи составим рабочую таблицу (табл. 5.2), в которую введем строку и столбец для потенциалов.

Задача закрытая, поскольку $2000+3000+3500+1500=1000+6000+1200+1800=10\,000$.

В соответствии с алгоритмом метода аппроксимации подсчитаем разности первого порядка (разности между двумя наименьшими значениями себестоимости перевозки 1 т сена) по строкам и столбцам. Эти разности запишем в соответствующую строку и столбец. Выберем среди всех разностей наибольшую — 5. Она нам показывает, что при определении оптимального варианта решения задачи именно в первой строке мы будем иметь наибольшие потери, если максимально не заполним клетку с наименьшей в этой строке оценкой, то есть клетку a_{14}. Итак, для того чтобы сразу же построить наиболее эффективный вариант перевозки сена, мы обязаны в клетку a_{14}, в которой наименьшая величина себестоимости перевозки сена от пункта А ко всем фермам, проставить максимально возможную величину — 1000.

Для того чтобы легче было ориентироваться в последовательности заполнения клеток, можно в одном из пустых углов заполненной клетки поставить порядковый номер поставки. В правый нижний угол клетки a_{14}, куда только что записали 1000, поставим цифру 1.

После того как в пункте А мы все сено распределили на IV ферму, первую строку можно как бы вычеркнуть из дальнейших расчетов. Четвертый столбец пока вычеркивать нельзя, так как соответствующая ферма не обеспечена полностью сеном. Переходим к рассмотрению оставшихся оценок разностей и находим максимальную из них. У нас оказалось, что максимальная разность равна 4 и их две — во второй строке и в третьем столбце. Здесь можно пойти двумя путями — отдать предпочтение строке или столбцу, ориентируясь на минимальную оценку среди имеющихся у них. В данном

Транспортная таблица 5.2

Пункты хранения сена		Фермы I	Фермы II	Фермы III	Фермы IV	$\sum_{j=1}^{4}$	Разности по строке I	Разности по строке II	Разности по строке III	α_i
А		$\boxed{50}$	$\boxed{40}$	$\boxed{20}$	1000 $\boxed{15}$ 1	1000	5			0
В		2000 $\boxed{20}$ 4	3000 $\boxed{12}$ 5	500 $\boxed{11}$ 6	500 $\boxed{7}$ 3	6000	4	5	13	—8
С		$\boxed{22}$	$\boxed{15}$	1200 $\boxed{10}$ 7	$\boxed{9}$	1200	1			—9
Д		$\boxed{28}$	$\boxed{10}$	1800 $\boxed{6}$ 2	$\boxed{4}$	1800	2			—13
$\sum_{i=1}^{4}$		2000	3000	3500	1500	10000				
Разница по столбцу	I	2	2	4	3					
	II	8	5	5						
	III									
β_j		28	20	19	15					

случае следует отдать предпочтение третьему столбцу, потому что его минимальная оценка — 6 меньше минимальной оценки второй строки — 7. А можно было бы воспользоваться разностями II, III и более высокого порядка. Так, разность второго порядка для второй строки равна 5 (12—7=5), а для третьего столбца она также равна 5 (11—6=5). Значит, с помощью вторых разностей проблему выбора мы бы не решили.

Рассмотрим разности третьего порядка: для второй строки она равна 13 (20—7=13), а для третьего столбца больше — 14 (20—6=14). Поскольку разность третьего порядка для третьего столбца выше, значит, предпочтение в заполнении клеток нужно отдать ему. Выбираем в этом столбце клетку с наименьшей оценкой (клетка a_{43}, или в соответствии с обозначениями в таблице 5.2 ее можно назвать клеткой Д III, с оценкой 6) и в нее записываем максимально возможную величину перевозки сена — 1800. В связи с тем, что у нас это была вторая по порядку распределяемая поставка, то в правом нижнем уголке этой клетки ставим цифру 2. Четвертую строку из дальнейших расчетов следует исключить, так как все 1800 т сена, имеющиеся в пункте Д, мы предполагаем полностью перевезти на третью ферму.

Рассматриваем оставшиеся разности первого порядка и убеждаемся, что максимальная разность среди оставшихся равна 3 и принадлежит четвертому столбцу. Находим в этом столбце клетку с наименьшей оценкой (клетка a_{44} с оценкой 4), но в нее мы ничего записать не можем, так как четвертая строка у нас выбыла из дальнейших расчетов. Значит, поставку следует заносить в клетку a_{24} с оценкой 7. Следя за правильностью балансовых соотношений, ставим сюда 500, а в соответствующем углу этой клетки пишем цифру 3, ибо это третья заполняемая поставка. Четвертый столбец исключаем из дальнейших расчетов, потому что соответствующая ферма обеспечена полностью сеном (1000+500=1500). Рассматриваем оставшиеся разности первого порядка. Максимальная из них равна двум и находится одновременно в первом и втором столбцах. Тогда рассмотрим вторые разности. Они составят для первого столбца 8, для второго 5. Значит, очередную поставку следует осуществлять в первом столбце (так как 8>5). Очевидно, что наиболее эффективная поставка в данном случае будет равна 2000 и должна находиться в клетке a_{21} с оценкой 20. Записываем сюда эту величину, а в соответствующем углу клетки ставим цифру 4, так как это четвертая по порядку поставка.

Рассмотрим оставшиеся разности первого порядка — второго столбца и третьей строки. Здесь нам следует отдать предпочтение столбцу, поскольку $2>1$. Очевидно, что в этом столбце поставку следует осуществить в клетку с оценкой 12. Поставка должна быть максимально возможной, равной 3000. В клетку a_{22} занесем 3000, а в соответствующем углу клетки проставим цифру 5 — пятая поставка.

Остальные поставки заносим в таблицу автоматически, поскольку их распределение очевидно. Оставшиеся 500 т сена из пункта В мы обязаны везти на третью ферму, то есть в клетку a_{23} запишем 500 — шестая поставка. Все 1200 т сена из пункта С следует везти на третью ферму, потому что остальные фермы уже обеспечены. В клетку a_{33} запишем 1200 — седьмая (последняя) поставка.

Итак, мы получили некоторое решение задачи, которое в соответствии с логикой решения должно быть наилучшим или близким к нему. Затраты на транспортировку всего сена в этом случае должны составить:

$$L=15\cdot1000+20\cdot2000+12\cdot3000+11\cdot500+7\cdot500+$$
$$+10\cdot1200+6\cdot1800= 1228 \text{ (руб.)}.$$

Теперь, воспользовавшись уже известной нам формулой (I), рассчитываем потенциалы и с помощью формулы (II) убеждаемся в том, что у нас в таблице 5.2 получено действительно оптимальное решение. Значения потенциалов представлены в соответствующем столбце и строке таблицы 5.2, а формула (II) сохраняет свое значение для всех незаполненных клеток этой таблицы.

Решая задачу методом аппроксимации, мы избавили себя от значительной механической работы. Достаточно сказать, что если бы мы стали эту задачу решать методом потенциалов сразу, то для того, чтобы дойти до оптимального варианта, нам потребовалось бы начертить и заполнить несколько транспортных таблиц.

§ 7. Модель оптимизации транспортировки однородного груза различными видами транспорта

В практике часто встречаются такие задачи, когда однородный груз необходимо доставить от поставщиков к потребителям и при этом имеется возможность использовать различные транспортные средства. В этом случае задача усложняется, поскольку требуется одновременно найти оптимальный вариант закрепления поставщиков за потребителями, то есть определить от кого, куда и сколько груза следует везти, при наилучшем выборе транспортных средств на его перевозку.

Для построения модели такой задачи примем следующую систему обозначения:

i — индекс отправителя груза ($i=1, 2, \ldots, m$);
j — индекс потребителя ($j=1, 2, \ldots, n$);
k — индекс транспортных средств ($k=1, 2, \ldots, p$);
A_i — объем груза у i-го отправителя (поставщика);
B_j — спрос в грузе j-ого потребителя;
D_k — наличие k-ых транспортных средств (их общая грузоподъемность);
x_{ijk} — неизвестный объем перевозки груза от i-ого поставщика j-ому потребителю k-ми транспортными средствами;
c_{ijk} — себестоимость перевозки единицы груза от i-ого поставщика j-ому потребителю с помощью k-ых транспортных средств;
L — общие минимальные затраты на перевозку при оптимальном варианте.

Тогда модель задачи в структурной форме имеет вид:

$$\text{найти } L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}x_{ijk}\to\min$$

(минимум затрат на транспортировку всего груза).
При условиях:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}=B_j$$

(общая перевозка груза от любых i-ых поставщиков любыми k-ми транспортными средствами в сумме должна удовлетворять потребность в грузе j-ого потребителя).

$$2)\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} \leqslant A_i$$

(объем перевозок от i-ого поставщика j-вым потребителям любыми k-ми транспортными средствами не может превышать наличия его у этого поставщика).

$$3)\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leqslant D_k$$

(разовый объем грузоперевозок всем j-вым потребителям от всех i-вых поставщиков k-ым видом транспорта не должен превышать общей грузоподъемности этих транспортных средств).

$$4)\ \sum_{i=1}^{m} A_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} B_i$$

(объем груза, имеющегося у поставщиков, должен быть не ниже спроса его потребителями).

$$5)\ x_{ijk} \geqslant 0$$

(условие неотрицательности переменных).

Решение такой задачи может осуществляться с помощью симплексного метода линейного программирования или с помощью специальных методов, включая приближенные решения задач транспортного вида. Причем такую задачу можно решать в два этапа. Сперва определить просто оптимальный вариант закрепления поставщиков за потребителями, затем определить оптимальное распределение транспортных средств для перевозки грузов, исходя из решения первой задачи. Решение в этом случае будет приближенное, но при правильном решении обеих задач оно будет достаточно близкое к оптимальному.

§ 8. Модель оптимизации транспортировки различных грузов различными видами транспорта

Смысл подобной задачи достаточно ясен и вряд ли его следует пояснять. Действительно, в практике подобные задачи возникают весьма часто, и именно они представляют наибольший интерес, но одновременно и наибольшую трудность. При правильном планировании в условиях, когда одновременно нужно перевозить различные грузы и использовать для этого различные транспортные средства, оптимальное решение такой задачи дает большой эффект.

Для построения принципиальной модели такой задачи примем следующие обозначения:

i — индекс пунктов отправления груза (поставщиков) ($i=1, 2, \ldots, m$);

j — индекс пунктов приема (потребления) груза (потребителей) ($j=1, 2, \ldots, n$);

k — индекс вида транспортных средств ($k=1, 2, \ldots, p$);

r — индекс вида груза ($r=1, 2, \ldots, R$);

A_{ir} — объем r-ого груза у i-ого поставщика;

B_{jr} — спрос j-ого потребителя в r-вом грузе;

D_{kr} — наличие k-ых транспортных средств, пригодных для перевозки r-ого груза;

x_{ijkr} — объем перевозки r-ого груза k-ым видом транспортных средств от i-ого поставщика j-ому потребителю;

c_{ijkr} — себестоимость транспортировки единицы r-ого груза k-ым видом транспорта от i-ого поставщика j-ому потребителю;

L — общие минимальные затраты на перевозку всех видов грузов.

На основании принятых обозначений запишем структурную модель задачи.

Найти $L=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{R} c_{ijkr}x_{ijkr}\to\min$

(общие затраты на перевозку всех грузов всеми видами транспорта должны быть минимальными).

При условиях:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijkr}=B_{jr}$$

(объем перевозок r-ого вида груза k-ми видами транспорта от всех i-ых поставщиков должен удовлетворять спрос j-ого потребителя в этом грузе).

$$2)\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ijkr}\leqslant A_{ir}$$

(объем перевозок r-ого груза k-ми видами транспорта от i-ого поставщика всем j-ым потребителям не должен превышать наличие данного груза у этого поставщика).

$$3)\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ijkr} \leqslant D_{kr}$$

(объем перевозок r-ого груза k-ым видом транспорта от всех поставщиков ко всем потребителям не должен превышать грузоподъемности k-ых транспортных средств, пригодных для перевозки r-ого груза).

$$4)\ \sum_{i=1}^{m} A_{ir} \geqslant \sum_{j=1}^{n} B_{jr}$$

(объем r-ого груза у поставщиков должен удовлетворять спрос в этом грузе потребителей).

$$5)\ x_{ijkr} \geqslant 0$$

(условие неотрицательности переменных).

Решение такой задачи довольно сложное, но тем не менее оно может осуществляться с помощью тех же методов и подходов, какие могли быть использованы для решения предыдущей задачи.

§ 9. Краткие выводы, методические советы и задания

Методы потенциалов и аппроксимации не единственные методы решения транспортных, или, как их еще называют, пространственных, задач. Класс таких задач правильнее следовало бы назвать распределительным, поскольку при применении этого метода речь не всегда идет о транспорте или территориальном размещении. С помощью этого метода можно успешно решать, например, задачи по оптимальному распределению тракторов и сельхозмашин по видам работ. Однако термин «транспортные задачи» уже прижился, а понятие распределительные задачи часто связывают с одним из методов решения транспортной задачи, который так и называется — распределительным. Вообще в настоящее время известно около двух десятков методов решения транспортной задачи, которые, как показывает анализ, дают либо оптимальное, либо близкое к оптимальному решение. Поэтому в принципе их можно считать эквивалентными, и специалисту хозяйства незачем пытаться освоить все методы их решения. Нецелесообразно это и потому, что практические задачи в абсолютном большинстве решаются на ЭВМ. Можно ограничиться знанием лишь тех двух методов, которые были изложены выше. Заметим, что метод потенциалов в литературе иногда называется по-другому — модифицированным распределительным методом или сокращенно Моди (англ. термин). Такое название его у нас применяется крайне редко. Автором этого метода официально считается Дж. Данциг, который предложил модифицированный распределительный метод в 1951 г. Однако более чем на десять лет раньше его советский математик Л. В. Канторович разработал основы этого метода и ввел при решении задачи термин «потенциал».

При изучении методов решения транспортной задачи важно понять логику алгоритмов, которая включает три основных момента:

а) получение начального плана, удовлетворяющего условиям задачи;

б) оценка плана по критерию оптимальности, который показывает, можно ли улучшить план;

в) совершенствование и получение оптимального или близкого к оптимальному плана.

В практических расчетах важно иметь в виду, что применение транспортной задачи, как правило, исключает встречные перевозки, предполагается, что поставщики и потребители связаны коммуникациями, запретительных ограничений (например, от второго поставщика запрещается везти груз третьему потребителю) не существует, задача носит закрытый характер. Однако существует немало задач, в которых требуется учитывать некоторые из таких ограничений. Это хотя и усложняет расчеты, но технически преодолимо. Если, например, возможности поставщиков превышают спрос потребителей, то при решении задачи необходимо ввести еще одного, так называемого «фиктивного» потребителя. Затраты на перевозку груза до него следует сделать весьма высокими, значительно (скажем, раз в десять) выше, чем самый высокий в условии задачи тариф. Спрос «фиктивного» потребителя равен:

$$\sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{i=1}^{m} A_i.$$

После того как будет получено оптимальное решение задачи, в окончательный ответ фиктивный потребитель не попадет, то есть его в данном случае просто игнорируют.

Может возникнуть такая ситуация, когда два пункта не связаны соответствующими коммуникациями или существует запрет по каким-либо причинам на перевоз к нему груза от некоторого поставщика. Для того, чтобы решить такую задачу, следует в клетку транспортной таблицы, которая стоит на пересечении этого поставщика и потребителя, занести так называемый «запретный тариф», то есть проставить в эту клетку такую величину, которая во много раз превышает максимальную величину фактического тарифа.

Для твердого усвоения постановки транспортной задачи, составления транспортной таблицы, составления опорного плана, алгоритма метода потенциалов и аппроксимации рекомендуем выполнить следующие задания.

Задание 1. *Задача 4.01.* Составьте произвольную транспортную таблицу размерности (3×3) (три поставщика и три потребителя). В клетки таблицы занесите произвольные нормативы, проставьте произвольные величины спроса потребителей в грузе и возможности поставщиков. Объясните экономический смысл неизвестных в задаче и нормативов. Поясните — какова цель задачи, что выступает в качестве целевой функции, открытая или закрытая составлена задача.

Задача 4.02. Составьте несколько допустимых решений задачи, используя методы «северо-западного угла», «минимума по строке», «минимума по столбцу», «минимального элемента». Сравните, какой план лучше.

Задача 4.03. Докажите оптимальность составленных вариантов плана. Если среди них есть неоптимальные, то, используя потенциалы, улучшите планы и доведите их до оптимальных.

Задание 2. Используя метод потенциалов, решите следующие задачи.

В хозяйстве на стойловый период заготовлено 2000 т сена, которое сконцентрировано на трех пунктах (A, B, C). Требуется развезти сено на четыре фермы (I, II, III и IV) так, чтобы общие затраты на его транспортировку для хозяйства были минимальными. Себестоимость перевозки 1 т сена (руб.) от пунктов до ферм задана матрицей М, объем сена на каждом пункте и сезонные потребности ферм в сене мы определили.

4.04 $M=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 1{,}0 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1{,}2 & 1{,}3 \\ 1{,}3 & 0{,}9 & 1{,}1 \\ 1{,}4 & 1{,}5 & 1{,}0 \end{pmatrix}$ A=500, B=700, C=800; I=400, II=500, III=800, IV=300

4.05 $M=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 1{,}2 & 1{,}3 & 1{,}4 \\ 1{,}4 & 0{,}8 & 1{,}5 \\ 0{,}9 & 1{,}2 & 1{,}3 \end{pmatrix}$ A=700, B=500, C=800; I=800, II=600, III=400, IV=300

4.06 $M=\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}9 & 1{,}6 \\ 1{,}3 & 1{,}3 & 1{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & 1{,}2 \\ 0{,}9 & 1{,}0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$ A=800, B=500, C=700; I=300, II=500, III=400, IV=800

Задание 3. Решите задачи 4.04—4.06, используя метод аппроксимации. Сравните полученные решения с теми, которые получились, когда использовали метод потенциалов. Если полученные решения не оптимальны, улучшите их, используя «правило замкнутого маршрута».

Задание 4. Решите следующие задачи, используя метод аппроксимации, а затем метод потенциалов.

Задача 4.07. В районе на четырех складах объединения «Сельхозтехника» имеются минеральные удобрения в количестве 80 000 ц, в том числе на первом складе 19 000 ц, на втором — 25 000, на третьем — 17 500 и на четвертом — 18 500 ц. Эти удобрения следует поставить в шесть хозяйств: первому — 12 000 ц, второму — 11 000, третьему — 13 000, четвертому — 16 000, пятому — 9500 и шестому — 18 500 ц. Себестоимость доставки удобрений задана.

Таблица 4.7

Себестоимость доставки 1 ц удобрений (коп.)

Склады	Хозяйства					
	1	2	3	4	5	6
I	15	7	6	9	14	6
II	8	6	8	6	7	14
III	5	8	6	5	5	8
IV	7	10	9	7	6	5

Надо определить такой план транспортировки удобрений от складов в хозяйства, чтобы общие затраты на перевозку удобрений были минимальными.

Задача 4.08. В хозяйстве имеется пять земельных участков с различным плодородием, общей площадью в 5000 га: I участок — 750 га, II — 1100 га, III — 980 га, IV — 1300 га и V — 870 га. На этих участках надо разместить посевы четырех зерновых культур, посевная площадь которых должна составить: ржи — 900 га, пшеницы — 1500 га, ячменя — 1200 га и овса — 1400 га. Известна урожайность этих культур на участках с различным плодородием.

Таблица 4.8

Урожайность культур (ц/га)

Культуры	Участки				
	I	II	III	IV	V
Рожь	15	18	22	21	27
Пшеница	19	22	23	28	31
Ячмень	16	18	24	26	27
Овес	11	12	14	13	17

Требуется определить такой план размещения зерновых культур по участкам, чтобы общий валовой сбор зерна был максимальным.

Задача 4.09. Определите оптимальное сочетание посевов кормовых культур по участкам так, чтобы достигался максимальный выход кормовых единиц.

Урожайность различных культур по участкам (в ц корм. ед.), площадь участков (га) и площадь посева (га) известны.

Таблица 4.9

Культуры	Урожайность по участкам в расчете на 1 га				Площадь посева
Кукуруза на силос	50	60	40	30	200
Вико-овсяная смесь	5	8	10	12	300
Турнепс	30	25	20	25	100
Свекла кормовая	24	25	18	22	200
Площадь участков	250	250	150	150	800

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ОСНОВНЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ВНУТРИХОЗЯЙСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Применение экономико-математических методов и ЭВМ особенно необходимо и наиболее эффективно в планировании и управлении производством на среднем и верхнем уровне (от района до народного хозяйства в целом). Причем чем больше объект, чем сложнее задача, тем эффективнее и необходимее становится использование этих методов и ЭВМ. Однако их применение весьма эффективно и во внутрихозяйственных расчетах на нижнем уровне планирования и управления.

В колхозах и совхозах можно выделить несколько основных групп задач, правильное решение которых требует привлечения математических методов и использования электронно-вычислительной техники. Это задачи оптимального общехозяйственного планирования (разработка оптимальных оргхозпланов, оптимальной специализации и т. д.); оптимизации растениеводства (расчет оптимальной структуры посевных площадей, оптимальных севооборотов, оптимального распределения средств химизации и т. д.); оптимизации животноводства (определение оптимальной структуры стада скота и птицы, оптимальных кормовых рационов и пр.); оптимизации грузоперевозок; оптимизации структуры и использования машинно-тракторного парка.

В связи с тем, что в рамках одной большой задачи практически не представляется возможным одновременно оптимизировать все внутрихозяйственные пропорции — от оптимизации структуры производства до оптимизации распределения машин и тракторов по видам работ, следует пользоваться системой моделей, то есть постепенно переходить от решения одних внутрихозяйственных задач к другим — от более общих к более частным. При этом образуется строгая подчиненность одних моделей другим — частных общим. Получается как бы пирамида, иерархия моделей. На верхних ступенях этой пирамиды находятся наиболее сложные и наиболее важные модели — определение оптимального оргхозплана, профинплана и т. д. Ниже идут модели отраслевого уровня — оптимизации растениеводства, животноводства и т. д. Обоснованность и эффективность расчетов будут тем выше, чем последовательнее соблюдается переход от моделей верхнего уровня к нижним. Однако и решение отдельных частных задач, если они достаточно правильно поставлены, позволяет добиться существенного эффекта. Поэтому задача заключается сейчас в том, чтобы наряду с совершенствованием теории применения экономико-математических методов добиваться их практического применения при решении как крупных проблем, так и отдельных, частных вопросов производства. При этом особенно важно помнить о том, что при решении общих задач нельзя учесть все «детали и мелочи». Речь здесь должна идти о главных, основных пропорциях, а при переходе к более частным задачам эти «детали и мелочи» должны все полнее учитываться и отражаться в их условиях.

В данном разделе рассмотрим в упрощенной постановке несколько наиболее важных задач внутрихозяйственного оптимального планирования.

ГЛАВА 5

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ И РАЗМЕЩЕНИЯ ПОСЕВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ

Правильная, научно обоснованная структура посевных площадей непосредственно обусловливает эффективность производства. Структура посевных площадей должна устанавливаться с учетом оптимальной структуры производства, направления развития хозяйства, его земельных угодий, качества почв, создания правильных севооборотов. Она должна обеспечивать рост производства продукции растениеводства и животноводства при всемерной экономии затрат труда и средств.

Основные параметры структуры посевных площадей могут быть определены на основе решения задачи оптимизации всей структуры производства в хозяйстве. Однако может быть поставлена и специальная задача — только по оптимизации структуры посевных площадей, в которой более подробно представляются все переменные и ограничения, связанные с развитием растениеводства.

§ 1. Общая постановка задачи

В наиболее общей и простой постановке задача определения оптимальной структуры посевных площадей в хозяйстве сводится к следующему. Исходя из перспективы развития хозяйства, необходимости интенсификации и углубления специализации производства, учитывая экспликацию земельных угодий, освоенные севообороты, план сдачи продукции государству и задачу обеспечения животноводства высококачественными кормами собственного производства, надо определить такую структуру посевных площадей, чтобы хозяйство от этого имело максимальный экономический эффект.

Для того чтобы понять важность, смысл и назначение такой задачи, рассмотрим небольшой пример.

Задача 5.1. Предположим, что площадь пашни в хозяйстве составляет 8000 га, площадь естественных сенокосов и пастбищ — 500 га. Общие ресурсы живого труда 300 тыс. человеко-дней. В хозяйстве на планируемый период можно возделывать: озимую пшеницу, озимую рожь, яровую пшеницу, яровую рожь, просо, гречиху, овес, горох, ячмень, кормовые корнеплоды, однолетние травы на сено и зеленый корм, многолетние травы на сено и зеленый корм, картофель. Имеющаяся площадь садов в хозяйстве — 200 га, но ее можно довести до 300 га.

В соответствии с освоенными севооборотами и направлением развития хозяйства установлено, что площадь зернового клина должна составлять не менее 60% площади пашни. Площадь под кормовыми корнеплодами должна находиться в пределах от 400 до 500 га. Площадь под озимыми в зерновом клине должна составлять не менее 50%, но и не превышать 4000 га (50% площади пашни). Площадь под травами на сено и на зеленый корм должна составлять соответственно не менее 500 и 600 га, а площадь посева картофеля — не менее 200 га.

Таблица 5.1

Урожайность, трудоемкость, себестоимость и цена реализации продукции

Показатели	Озимая пшеница	Озимая рожь	Яровая пшеница	Яровая рожь	Просо	Гречиха	Овес	Горох	Ячмень	Кормовые корнеплоды	Однолетние травы на сено	Однолетние травы на зеленый корм	Многолетние травы на сено	Многолетние травы на зеленый корм	Картофель	Естественные сенокосы и пастбища (сено)	Сады (семечковые)
Урожайность (ц/га)		20	25	20	20	20	15	25	20	200	20	50	30	50	200	40	50
Трудоемкость (ч.-дн. на 1 ц)	0,2	0,3	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,6	0,3	0,1	0,2	0,1	0,5	0,1	0,4
Себестоимость (руб/ц)	3,0	3,5	3,0	4,0	2,5	10,0	3,0	7,0	4,0	2,0	1,5	0,5	2,0	0,5	6,0	1,0	20,0
Реализационная цена (руб/ц)	7,0	7,5	7,5	8,0	7,0	13,0	4,0	10,0	5,5	2,0	3,0	0,7	3,5	0,8	9,0	2,0	28,0

Матрица экономико-математической задачи для определения

Переменные / Ограничения	Единица измерения	Озимая пшеница x_1	Озимая рожь x_2	Яровая пшеница x_3	Яровая рожь x_4	Просо x_5	Гречиха x_6	Овес x_7
1. Площадь пашни	га	1	1	1	1	1	1	1
2. Площадь под естественными сенокосами и пастбищами	»							
3. Площадь под садами	»							
4. » » »	»							
5. Площадь под зерновыми	»	1	1	1	1	1	1	1
6. Площадь под кормовыми корнеплодами	»							
7. Площадь под кормовыми корнеплодами	»							
8. Площадь под озимыми	»	1	1					
9. » » »	»	1	1					
10. Травы на сено	»							
11. » » зеленый корм	»							
12. Картофель	»							
13. Затраты труда	ч/дн	6,0	6,0	5,0	4,0	6,0	6,0	4,5
14. Сдача государству зерна	ц	30	20	25	20	20	20	15
15. Сдача государству картофеля	»							
16. Сдача государству фруктов	»							
17. Себестоимость	руб.	3,0	3,5	3,0	4,0	2,5	10,0	3,0
18. Валовая продукция	»	7,0	7,5	7,5	8,0	7,0	13,0	4,0
19. Прибыль	»							

Таблица 5.2

оптимальной структуры посевных площадей в хозяйстве

Горох x_8	Ячмень x_9	Кормовые корнеплоды x_{10}	Однолетние травы на сено x_{11}	Однолетние травы на зеленый корм x_{12}	Многолетние травы на сено x_{13}	Многолетние травы на зеленый корм x_{14}	Картофель x_{15}	Естественные сенокосы и пастбища x_{16}	Сады x_{16}	Общая себестоимость x_{17}	Валовая продукция x_{18}	Объемы и виды ограничений
1	1	1	1	1	1	1	1					⩽8 000
								1				=500
									1			⩾200
									1			⩽300
1	1											⩾4800
		1										⩾400
		1										⩽500
												⩾2 400
												⩽4 000
			1		1							⩾500
				1		1						⩾600
							1					⩾200
7,5	4,0	120,0	6,0	5,0	6,0	5,0	100,0	4,0	20,0			⩽300 000
25	20											⩾80 000
							200					⩾30 000
									50			⩾1 000
7,0	4,0	2,0	1,5	0,5	2,0	0,5	6,0	1,0	20,0	−1		= 0
10,0	5,5	2,0	3,0	0,7	3,5	0,8	9,0	2,0	28,0		−1	= 0
										−1	1	→max

Хозяйству доведен следующий план сдачи государству продукции: зерновых не менее 80 тыс. ц, картофеля не менее 30 тыс. ц, фруктов не менее 1000 ц.

Ожидаемая урожайность, трудоемкость, себестоимость и цена реализации 1 ц продукции установлены (табл. 5.1).

Исходя из этих условий, хозяйству надо определить такую структуру посевных площадей, чтобы от этого иметь наивысшую эффективность производства. Очевидно, что в качестве наивысшей эффективности производства в данном случае, как впрочем и в большинстве аналогичных задач, должен выступать основной показатель — максимальная прибыль от растениеводства.

С соблюдением записи всех вышеперечисленных условий матрица такой задачи имеет вид (табл. 5.2).

Для того, чтобы записать структурную модель нашей задачи, примем следующую систему обозначений:

j — индекс переменных ($j=1, 2, \ldots, 18$);

i — индекс ограничений ($i=1, 2, \ldots, 19$);

x_j — конкретная переменная величина (площадь посева j-ой культуры);

c_j — оценка эффективности производства j-ой продукции с единицы площади (себестоимость, цена реализации продукции с 1 га посева);

S_i — площадь посева (по i-ому ограничению);

$S_{i\min}$, $S_{i\max}$ — минимально допустимая и максимально возможная площадь посева (по i-ому ограничению);

A_i — объем i-ого ресурса;

a_{ij} — норматив затрат i-ого ресурса на производство конкретной продукции (в расчете на единицу j-ой переменной);

b_{ij} — урожайность j-ой культуры;

B_i — установленный нижний предел сдачи государству конкретной продукции;

Z — прибыль при оптимальной структуре посевных площадей.

С учетом принятых обозначений и записи условий в таблице 5.2 модель задачи в структурной форме можно записать так:

найти $Z=(-x_{17}+x_{18})\rightarrow\max$

(максимальную прибыль).

При условиях:

$$1)\quad \sum_{j=1}^{15} x_j \leqslant S_i \quad (\text{для } i=1)$$

(ограничение на использование площади пашни).

$$2)\quad S_{i\min} \leqslant x_j \leqslant S_{i\max} \quad (\text{для } i=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 12)$$

(ограничение на верхний и нижний предел площади посева конкретной культуры).

$$3)\quad \sum_{j=1}^{9} x_j \geqslant 0{,}6 S_i \quad (\text{для } i=5)$$

(ограничение на нижний предел площади зернового клина в общей площади пашни).

$$4)\quad S_{i\min} \leqslant \sum_{j=1}^{2} x_j \leqslant S_{i\max} \quad (\text{для } i=8,\ 9)$$

(ограничение на нижний и верхний предел площади озимых зерновых).

$$5)\quad x_{11} + x_{13} \geqslant S_{i\min} \quad (\text{для } i=10)$$

(ограничение на минимально допустимую площадь посева многолетних и однолетних трав на сено).

$$6)\quad x_{12} + x_{14} \geqslant S_{i\min} \quad (\text{для } i=11)$$

(ограничение на минимально допустимую площадь посева однолетних и многолетних трав на зеленый корм).

$$7)\quad \sum_{j=1}^{17} a_{ij} x_j \leqslant A_i \quad (\text{для } i=13)$$

(ограничение по затратам труда).

$$8)\quad \sum_{j=1}^{17} b_{ij} x_j \geqslant B_i \quad (\text{для } i=14,\ 15,\ 16)$$

(ограничение на нижний предел производства продукции).

§ 2. Постановка и модель задачи по оптимизации структуры и размещения посевных площадей (по участкам, полям, отделениям)

Задача 5.2. Предположим, что в хозяйстве на трех участках с различным естественным плодородием почвы можно производить четыре культуры (пшеницу, рожь, картофель и сахарную свеклу фабричную). Площадь участков известна и составляет: первого — 2000 га, второго — 4000 га, третьего — 3000 га. Определено, что площадь посева пшеницы должна составлять не менее 1000 и не более 2500 га; площадь посева ржи — не менее 500 и не более 3000 га, площадь под картофелем — не менее 900 и не более 1800 га, а площадь под сахарной свеклой фабричной — не менее 800 и не более 1700 га. С учетом урожайности и затрат определена эффективность выращивания названных культур, которая различна по участкам: выращивание пшеницы на первом участке позволяет получать прибыль (в расчете на 1 га) в размере 200 руб., пшеница на втором участке дает 160 руб., а на третьем участке 100 руб. Соответственно выращивание ржи позволяет получать прибыли с 1 га на первом участке 150 руб., на втором — 160, на третьем — 120 руб. Выращивание картофеля позволяет получать прибыль в таком размере: на первом участке 200 руб. с 1 га, на втором — 170, а на третьем — 220 руб. Производство сахарной свеклы фабричной позволяет получать прибыль с 1 га: на первом участке 180 руб., на втором — 200, на третьем — 160 руб.

Определить такую структуру посевных площадей и так разместить посевы по участкам, чтобы общая прибыль от их выращивания была максимальной.

В данной задаче в качестве неизвестных величин выступает площадь посева конкретной культуры на конкретном участке, то есть сколько должно быть посеяно пшеницы, ржи, картофеля и сахарной свеклы на каждом из участков.

Система обозначений:

S — площадь, п — пшеница, р — рожь, к — картофель, с — сахарная свекла;

i — индекс ограничения ($i=1, 2, \ldots, m$);

j — индекс переменной ($j=1, 2, \ldots, n$);

x_{ij} — площадь посева j-ой культуры на i-ом участке (га);

Таблица 5.3

Матрица задачи оптимизации структуры и размещения посевных площадей по участкам (га)

Переменные / Ограничения	I участок				II участок				III участок				Размер и вид ограничений
	п	р	к	с	п	р	к	с	п	р	к	с	
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
1. Площадь I участка	1	1	1	1									$\leqslant 2000$
2. Площадь II участка					1	1	1	1					$\leqslant 4000$
3. Площадь III участка									1	1	1	1	$\leqslant 3000$
4. S посева пшеницы	1				1				1				$\leqslant 2500$
5. S посева ржи		1				1				1			$\leqslant 3000$
6. S посева картофеля			1				1				1		$\leqslant 1800$
7. S посева сахарной свеклы				1				1				1	$\leqslant 1700$
8. S посева пшеницы	1				1				1				$\geqslant 1000$
9. S посева ржи		1				1				1			$\geqslant 500$
10. S посева картофеля			1				1				1		$\geqslant 900$
11. S посева сахарной свеклы				1				1				1	$\geqslant 800$
Прибыль с 1 га (руб.)	200	150	200	180	160	160	170	200	100	120	220	160	$\rightarrow \max$

c_{ij} — оценка эффективности 1 га посева j-ой культуры на i-ом участке (прибыль в расчете на 1 га — руб.);

S_i — площадь i-ого участка (га);

$S_{i\min}$, $S_{i\max}$ — минимально допустимая и максимально возможная общая площадь конкретной культуры (га);

L — максимальная прибыль при оптимальной структуре и размещении посевных площадей.

Модель задачи в структурном виде применительно к сформулированным условиям запишется так:

$$\text{найти } L = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \max$$

(максимальная прибыль от всех культур на всех участках).

При условии:

$$1)\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leqslant S_i \quad (\text{для } i=1,\ 2,\ 3)$$

(площадь посева всех культур на одном конкретном участке не должна превышать площади этого участка).

$$2)\ S_{i\min} \geqslant \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leqslant S_{i\max} \quad (\text{для } i=4-11)$$

(площадь посева одной конкретной культуры на всех участках может быть ограничена с двух сторон — минимально допустимой и максимально возможной общей площадью посева данной культуры).

$$3)\ x_{ij} \geqslant 0.$$

Данная задача, как и первая, решается с помощью симплексного метода линейного программирования.

§ 3. Применение модели транспортной задачи для оптимизации размещения посевных площадей

Постановки такой задачи мы кратко касались при изложении методов решения транспортной задачи линейного программирования, рассматривая случай стремления целевой функции транспортной задачи к максимуму. Там же рассматривали мы и алгоритм решения такой задачи. Поэтому в данном параграфе мы остановимся лишь на вопросах постановки, модели и области применения транспортной задачи для оптимизации размещения посевных площадей. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 5.3. Предположим, что в хозяйстве выращивается 4 сорта озимой пшеницы: Мироновская 808, Юбилейная 50, Ильичевка, Безостая 1. Средняя многолетняя урожайность этих сортов по предшественникам известна (табл. 5.4). Площади предшественников соответственно составляют: 250 га, 500, 300, 200 га.

Под Мироновскую 808 отводится 200 га, под Юбилейную 50 — 450 га, под Ильичевку — 350 га, под Безостую 1 — 200 га.

Таблица 5.4

Средняя многолетняя урожайность по предшественникам

Сорта	Предшественники			
	силосные	однолетние травы	целина	бобовые
Мироновская 808	34	32	30	25
Юбилейная 50	37	35	36	36
Безостая 1	24	23	25	28
Ильичевка	30	28	30	27

Следует так разместить посевы озимой пшеницы, чтобы валовой сбор ее был максимальным.

Для того, чтобы построить экономико-математическую модель задачи, примем следующие обозначения:

i — индекс различных сортов пшеницы, производимых в хозяйстве ($i=1, 2, \ldots, m$);

j — индекс предшественников ($j=1, 2, \ldots, n$);

A_i — количество площади, отводимое под посев i-го сорта пшеницы;

B_j — количество площади, занимаемой j-ым предшественником;

x_{ij} — количество площади посева i-ого сорта пшеницы по j-ому предшественнику;

V_{ij} — урожайность i-ого сорта пшеницы на поле j-ого предшественника;

L — максимальный валовой сбор пшеницы.

Найти $L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}V_{ij}x_{ij}\longrightarrow\max$

(максимальный валовой сбор).
При условиях:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=A_i\ \ (i=1,\ 2,\ldots,m)$$

(количество всей площади посева i-го сорта пшеницы должно быть равным площади, отводимой под данный вид культуры).

$$2)\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=B_j\quad (j=1,\ 2,\ldots,n)$$

(общее количество площади, засеянной на поле j-ого предшественника, должно быть равным площади данного поля).

$$3)\ \sum_{i=1}^{m}A_i=\sum_{j=1}^{n}B_j$$

(общее количество засеянной площади должно быть равно количеству имеющейся площади).

$$4)\ x_{ij}\geqslant 0$$

(условие неотрицательности переменных).

Данная модель задачи целиком подходит под закрытую модель транспортной задачи, а значит, и решение ее может осуществляться изложенными выше методами (см. главу 4), например, с помощью метода потенциалов или метода аппроксимации.

Матрица такой задачи представлена в таблице 5.5.

Оптимальный вариант размещения посевных площадей пшеницы по различным предшественникам, который был определен с помощью метода потенциалов, представлен в таблице 5.6.

Значения переменных: $a_{11}=200$; $a_{21}=50$; $a_{22}=400$; $a_{32}=100$; $a_{33}=50$; $a_{34}=200$; $a_{43}=250$.

Таким образом, оптимальный вариант размещения посевов озимой пшеницы будет в том случае, когда Ми-

Таблица 5.5

Матрица задачи оптимизации размещения посевных площадей (в транспортной постановке)

Сорта пшеницы \ Предшественники	Силосные I	Однолетние травы II	Целина III	Бобовые IV	$\sum_{j=1}^{4}$
1. Мироновская 808	34	32	30	25	200
2. Юбилейная 50	37	35	36	36	450
3. Безостая 1	24	23	25	28	350
4. Ильичевка	30	28	30	27	250
$\sum_{i=1}^{4}$	250	500	300	200	1250

Таблица 5.6

Сорта пшеницы \ Предшественники	Силосные I	Однолетние травы II	Целина III	Бобовые IV	$\sum_{j=1}^{4}$	α_i
1. Мироновская 808	200 | 34	32	30	25	200	0
2. Юбилейная 50	50 | 37	400 | 35	36	36	450	3
3. Безостая 1	24	100 | 23	50 | 25	200 | 28	350	—9
4. Ильичевка	30	28	250 | 30	27	250	—4
$\sum_{i=1}^{4}$	250	500	300	200	1250	
β_j	34	32	34	37		

$L_{max} = 200 \cdot 34 + 50 \cdot 37 + 400 \cdot 35 + 100 \cdot 23 + 50 \cdot 25 + 200 \cdot 28 + 250 \cdot 30 = 39\,300$ ц.

роновская 808 займет 200 га на I поле (после силосных); Юбилейная 50 на площади 50 га будет выращиваться на I поле (после силосных) и 400 га на II поле (после однолетних трав); Безостая 1—на площади 100 га на II поле (после однолетних трав), 50 га на III поле (по целине) и 200 га на IV поле (после бобовых); Ильичевка — 250 га на III поле (по целине).

При таком размещении посевов следует ожидать максимальный урожай озимой пшеницы в размере 39 300 ц.

§ 4. Краткие выводы, методические советы и задания

Изучая данную тему, следует иметь в виду и особенно важно понять, что при решении вопроса об оптимальной структуре и размещении посевных площадей возможны различные подходы к постановке и решению задачи.

Наиболее правильно такая задача решается в рамках более общей задачи — оптимизации структуры и размещения производства всей продукции в хозяйстве, как растениеводческой, так и животноводческой. Однако такие задачи довольно сложны и начинающему изучать экономико-математические методы не всегда понятны.

Поэтому следует научиться на первых порах формулировать упрощенные задачи в различной постановке, попытаться самому на конкретном материале построить несколько упрощенных матриц задач и определить, какими методами данные задачи следует решать. При записи балансовых условий задачи возникнет немало вопросов, например: как отразить, что в структуре посевных площадей, скажем, озимые зерновые должны занимать не менее 50%, или как учесть повторные и пожнивные посевы и т. д. На все эти вопросы нельзя подготовить заранее ответы, поэтому, исходя из общих принципов моделирования и учитывая специфику хозяйства, необходимо читателю самому подумать над возможностью решения таких вопросов. При этом следует воспользоваться так называемыми коэффициентами пропорциональности или коэффициентами связи. Запись таких условий у нас уже встречалась в первой задаче данной главы и представлена в соответствующей матрице.

Рекомендуем попытаться одно и то же условие задачи записать по-разному, если это возможно. Весьма желательно, чтобы при составлении задачи было отобрано несколько критериев оптимальности и выбран среди них наилучший. При постановке задачи и оформлении ее модели не загружайте матрицу малозначащими, второстепенными условиями, акцентируйте все внимание на тех ограничениях, которые прежде всего и в наибольшей степени лимитируют увеличение производства продукции растениеводства.

Если имеется возможность, надо объединить ряд культур и представить их гораздо меньшим числом переменных (например, вместо 5—10 видов овощей ввести в задачу, скажем, две переменные по овощам — капуста и огурцы всех сортов). Для более прочного усвоения материала данного раздела рекомендуем разобраться с матрицами задач по оптимизации всей хозяйственной деятельности и оптимизации кормопроизводства и кормовых рационов.

Задание 1. Площадь пашни в хозяйстве 10 000 га; площадь под зерновыми должна составлять не менее 60% от площади пашни, площадь под озимыми зерновыми — не менее 50% от общей площади зерновых; многолетние и однолетние травы должны занимать не менее 800 га, овощные культуры — не менее 500 га, картофель — не менее 600 га. Государству надо сдать: зерна не менее 40 000 ц, картофеля не менее 5000 ц, овощей (в среднем) не менее 4000 ц. Общие трудовые ресурсы для отраслей растениеводства составляют 200 000 человеко-дней.

В хозяйстве производятся: озимая пшеница, озимая рожь, яровая пшеница, яровая рожь, овес, ячмень, картофель, овощи, многолетние и однолетние травы на сено и зеленый корм. Урожайность с 1 га (ц): озимой пшеницы 40, озимой ржи 30, яровой пшеницы 30, яровой ржи 25, овса 25, ячменя 30, картофеля 150, овощей 200, многолетних трав на сено 25, на зеленый корм 50, однолетних трав на сено 20, на зеленый корм 40.

Затраты труда, себестоимость и цена реализации (в расчете на 1 ц продукции) установлены (табл. 5.7).

Требуется: а) составить матрицу для расчета оптимальной структуры посевных площадей, в качестве критерия оптимальности взять показатель — максимальная прибыль;

б) записать условия матрицы задачи в структурной форме или в виде линейных уравнений и неравенств.

Таблица 5.7

Затраты труда, себестоимость и цена реализации 1 ц продукции

Показатели	Озимая пшеница	Озимая рожь	Яровая пшеница	Яровая рожь	Овес	Ячмень
Затраты труда (человеко-часы)	4	5	3	4	4	3
Себестоимость (руб.)	3,5	4,2	4,0	2,5	4,0	3,8
Реализационная цена (руб.)	8,0	7,5	7,6	7,2	5,0	5,5

Продолжение

Показатели	Картофель	Овощи	Однолетние травы на сено	Однолетние травы на зеленый корм	Многолетние травы на сено	Многолетние травы на зеленый корм
Затраты труда (человеко-часы)	7	8	2	1	3	1
Себестоимость (руб.)	8,0	15	1,2	0,4	1,5	0,5
Реализационная цена (руб.)	8,0	30,0	2,5	0,6	3,5	0,8

Задание 2. В хозяйстве возделывается озимая пшеница, сахарная свекла, однолетние травы. Хозяйство может выделить для их выращивания 2000 га пашни, 12 000 человеко-дней трудовых ресурсов и 2000 машиносмен механизированного труда.

Урожай озимой пшеницы запланирован на уровне 20 ц с 1 га, сахарной свеклы — 250 ц и однолетних трав — 25 ц кормовых единиц. Средняя цена реализации 1 ц пшеницы — 5 руб., 1 ц сахарной свеклы — 2 руб., 1 ц кормовых единиц — 3 руб.

На основании условий задачи необходимо:

а) построить матрицу задачи;

б) записать данную задачу в виде неравенств;

в) превратить неравенства в уравнения;

г) решить задачу по критерию максимальное количество продукции в денежном выражении;

д) произвести анализ решения задачи.

Задание 3. В хозяйстве имеются три участка, на которых можно производить озимую пшеницу, картофель и овощи. Площадь участков соответственно составляет 200 га, 200 и 400 га. Под озимой пшеницей необходимо засеять не менее 200 и не более 300 га. Прибыль с 1 га посева составляет (руб.): от возделывания озимой пшеницы на первом участке 200, на втором 220, третьем 350; от возделывания картофеля соответственно 180, 180 и 150; от возделывания овощей — 120, 140 и 160.

Требуется составить матрицу задачи и определить, каким методом ее можно решать.

Задание 4. В совхозе выращивают три сорта огурцов на площади 65 га, в том числе под сорт Муромский отведено 20 га, под Неросимый — 18 га и под Вязниковский — 27 га. В четырех отделениях совхоза под огурцы отведены участки следующей величины: в первом — 15 га, во втором — 12, в третьем — 23 и в четвертом — 15 га.

Средняя многолетняя урожайность огурцов представлена в таблице 5.8.

Таблица 5.8

Средняя многолетняя урожайность огурцов по отделениям

Сорта	Отделения			
	I	II	III	IV
Муромский	220	210	180	200
Неросимый	190	230	260	220
Вязниковский	200	170	200	210

Требуется:

а) составить матрицу задачи;

б) записать условия задачи в виде системы уравнений;

в) определить экономический смысл целевой функции и записать ее в математической форме;

г) решать задачу с помощью метода аппроксимации или метода потенциалов.

ГЛАВА 6

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ СТАДА СКОТА (ПТИЦЫ)

Для совершенствования организации и планирования сельскохозяйственного производства большое значение имеет установление наиболее рациональной структуры стада скота и птицы, то есть правильных, оптимальных соотношений половых и возрастных групп в структуре стада с учетом основных зоотехнических и экономических требований. Решение таких задач наиболее эффективно после того, как в хозяйстве определена оптимальная структура производства продукции. Но даже и в том случае, когда первая задача еще не решена, вопросы совершенствования определения оптимальной структуры стада имеют важное практическое значение.

От структуры стада непосредственно зависят темпы расширенного воспроизводства на фермах и оборот стада, объем производимой и реализуемой продукции, себестоимость продукции, масса прибыли и уровень рентабельности хозяйства. В зависимости от структуры стада определяется и планируется кормовая база, количество животноводческих построек, число работников, обслуживающих животноводство.

Структура стада зависит от направления хозяйства. В хозяйствах молочного направления, например, надо иметь более высокий удельный вес молочных коров в стаде. Практика показывает, что в передовых хозяйствах, специализирующихся на производстве цельного молока, удельный вес коров в общем поголовье крупного рогатого скота достигает 60—65 и даже 70%. На молочных фермах, продукция которых идет в переработку, доля коров меньше — порядка 40—55%.

В хозяйствах мясного скотоводства, для которых главная задача — производство говядины, процент коров в стаде еще ниже, примерно 35—40%.

Еще более резкие колебания в структуре стада наблюдаются в овцеводстве. Так, в тонкорунном племенном овцеводстве ежегодно выбраковывается 12—15% маток, в районах Западной Сибири в пользовательных стадах шерстно-мясных овец доля маток в стаде составляет 50—60%, а валухов 10—15%, в отраслях мясо-шерстного поголовья удельный вес маток выше — 60—75%. Таким образом, объективно существует необходимость в постановке и решении задачи по определению оптимальной структуры стада.

В наиболее общей постановке смысл такой задачи сводится к следующему: учитывая производственное направление, природную и экономическую специфику хозяйства, темпы воспроизводства стада, состояние кормовой базы, тип кормления скота и т. п., необходимо определить оптимальную структуру стада, то есть такую его структуру, которая бы позволила хозяйству добиваться наилучших экономических показателей, наивысшей эффективности производства с точки зрения конкретного критерия оптимальности.

Ввиду того, что структуру стада определяет множество факторов, возникает так называемая многовариантная задача, решение которой можно осуществлять двумя путями: использовать методы математической статистики и аппарат математического анализа или же применить методы математического программирования.

§ 1. Математико-статистические модели для совершенствования структуры стада

Суть применения математико-статистических моделей для совершенствования структуры стада сводится к следующему. Собирается статистическая информация относительно показателей структуры стада в хозяйствах района или области, желательно одного направления, и параллельно вводится один из результативных показателей, отражающий влияние структуры стада на результат производства (валовая продукция, валовой привес, надои, прибыль от животноводства, прибыль от конкретного вида скота и т. п.). Причем информация собирается по специальной статистической программе на основании обследования сплошной или выборочной совокупности. Например, обследуются все хозяйства в области, которые входят в систему «Скотопрома». Затем применяется специальный математико-статистический аппарат для определения уравнения регрессии, то есть конкретного вида зависимости результативного показателя от показателей структуры стада. После этого, на основании анализа расчетных параметров модели (функции структуры стада), определяется наиболее рациональная структура стада, позволяющая добиваться наибольшего экономического эффекта.

Общий вид модели, характеризующий зависимость эффективности производства от удельного веса конкретной половозрастной группы скота в структуре стада, в этом случае таков:

$$y=f(x_1, \ x_2, \ldots, x_n),$$

где y — значение результативного признака;

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — удельные веса первой, второй и т. д. половозрастной группы скота в структуре стада.

Если, например, исследуется зависимость прибыли от скотоводства в зависимости от структуры стада крупного рогатого скота в хозяйствах мясо-молочного направления, то y будет величина прибыли (руб.):

x_1 — удельный вес коров в стаде (%);
x_2 — » » быков-производителей (%);
x_3 — » » нетелей (%);
x_n — удельный вес в стаде взрослых животных на откорме (%).

Для такой задачи необходимо будет собрать и передать в вычислительный центр (вручную такие задачи решать нерационально и очень сложно) для расчетов на электронно-вычислительной машине информацию по всем (n) факторам ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) и по результативному показателю (y).

Информационный бланк, передаваемый в ВЦ, имеет следующий вид.

Таблица 6.1

Информационный бланк для исследования влияния структуры стада на результаты производства

Номер хозяйства	Показатели							
	y	x_1	x_2	x_3	...	x_j	...	x_n
1	y_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_1	...	x^1
2	y_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_2	...	x_2
3	y_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_3	...	x_3
...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
N	y_N	x_{N1}	x_{N2}	x_{N3}	...	x_{Nj}	...	$x_{Nн}$

N — количество хозяйств, подвергнутых обследованию. В клетках такого бланка вместо показателей y_i и x_{ij} заносятся конкретные отчетные данные по всем n факторам (включая и y) и по всем N хозяйствам.

С помощью специального математического аппарата и статистических критериев подбираются виды функции, достаточно хорошо (адекватно) отражающие данную зависимость.

В подобных задачах, как правило, используется либо линейная форма функции, либо степенная.

Линейная функция:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \qquad (1)$$

или

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j .$$

Степенная функция

$$y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \qquad (II)$$

или

$$y = \alpha_0 \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$$

Параметры линейной функции (a_0, a_1, a_2, ..., a_n), так же как и степенной, определяются в результате расчета на ЭВМ, например, согласно так называемому методу наименьших квадратов.

Коэффициенты в функциях (I) и (II) имеют определенный экономический смысл. Так, в линейной функции коэффициенты (a_1, a_2, ..., a_n) показывают, на сколько изменится y, если соответствующий x изменить на единицу. Коэффициенты во второй функции показывают, на сколько процентов изменится y, если соответствующий x изменить на один процент от своего уровня.

Для того чтобы определить наилучшую структуру стада с точки зрения результативного показателя, достаточно функции (I) или (II) исследовать на экстремум.

Вопросы применения таких моделей будут подробнее рассмотрены в главе, посвященной производственным функциям, а тем, кто желает более обстоятельно и подробно ознакомиться с применением принципов математико-статистического моделирования для исследования аналогичных зависимостей, рекомендуем обратиться к специальной литературе по применению методов корреляции и регрессии в анализе сельскохозяйственного производства.

Математико-статистические модели для совершенствования структуры стада могут в ряде случаев дополняться, а иногда и заменяться моделями линейного программирования. Применение моделей линейного программирования для оптимизации структуры стада особенно важно тогда, когда стоит задача определения оптимальной структуры стада непосредственно в каком-то хозяйстве. Здесь практически нельзя воспользоваться моделями статистического характера, поскольку они базируются на массовых материалах, на описании зависимости по совокупности хозяйств или за длительный период (в динамике), так сказать, для среднего уровня хозяйствования. В большинстве практических задач требуется определить оптимальную структуру стада на тот или иной период для конкретного хозяйства, безотносительно к их совокупности или динамике. В этом случае необходимо обратиться к моделям и методам математического и, в частности, линейного программирования.

§ 2. Простейшая экономико-математическая модель для оптимизации структуры стада в хозяйстве

Для того чтобы построить экономико-математическую модель такой задачи, необходимо все поголовье скота обозначать за единицу или за 100%. Причем это в равной степени относится как к задаче по оптимизации структуры стада крупного рогатого скота, так и стада свиней, овец и птицы.

Пусть речь идет об оптимизации структуры стада крупного рогатого скота. Все поголовье стада обозначим за единицу и примем следующие обозначения:

j — индекс половозрастной группы скота в стаде ($j=1, 2, \ldots, n$);

i — индекс ограничения ($i=1, 2, \ldots, m$);

x_j — доля j-ой половозрастной группы скота в стаде;

c_j — оценка эффективности j-ой половозрастной группы скота (в расчете на одну долю);

$Q_{i\,\min}$, $Q_{i\,\max}$ — минимально допустимая и максимально возможная величина содержания j-ой половозрастной группы скота в стаде;

k_{ij} — коэффициент связи двух любых половозрастных групп скота;

L — величина экономического эффекта (прибыль, валовая продукция и т. п.) при оптимальной структуре стада.

На основании принятых обозначений простейшую экономическую модель задачи по расчету оптимальной структуры стада можно записать так:

найти $L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max$

при условии:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \quad (i=1)$$

(ограничение на всю структуру стада).

$$2)\ k_{ij}x_j - x_j' \left\{ \gtreqqless 0 \quad (i=2, 3, \ldots, к) \right.$$

(ограничения по связи j-ой и j'-ой половозрастной группы скота в стаде).

$$3)\ a_{i\,\min} \leqslant x_j \leqslant a_{i\,\max} \quad (i=к+1, \ldots, m)$$

(двухсторонние ограничения на наличие j-ой группы скота в стаде).

$$4)\ x_j \geqslant 0.$$

Условия поставленной задачи достаточно простые. Поэтому ограничимся лишь небольшими общими пояснениями.

Первый тип ограничений в модели вряд ли нуждается в пояснении. Ясно, что всю структуру стада, какой бы дробной или агрегированной она ни была, следует принять за единицу или за 100%. В соответствии с этим, естественно, и x_j будет изменяться либо в долях ($0 \leqslant x_j \leqslant 1$), либо в процентах ($0 \leqslant x_j \leqslant 100$).

Второе условие используется для записи связи любых двух половозрастных (j *и* j') групп скота в стаде. Например, если x_1 — доля коров в стаде, а x_2 — доля телочек до одного года и если известно, что вероятность выживаемости телочек равна 0,9, а вероятность их выхода 0,5 (то есть вероятность рождения бычка и телочки одинакова), и если известно, что каждая корова в течение года должна дать единицу приплода, то это необходимо учитывать и как-то отражать в модели. На один процент (долю) коров в стаде должно приходиться 0,45 (поскольку $0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}45$) доли телочек до одного года. Иными словами, на 10 коров в стаде должно приходиться 4,5 телочки до года, то есть доля коров в стаде должна быть в 2,22 раза больше, чем доля телочек. Таким образом, данное условие можно записать по-разному, например, так:

$$0{,}45x_1 - x_2 = 0, \text{ или } x_1 - 2{,}22x_2 = 0.$$

Как нетрудно убедиться, обе записи эквивалентные. Если, скажем, доля коров в стаде составляет 0,3, то доля телочек при этом должна составить:

$$0{,}45 \cdot 0{,}3 = 0{,}135 \text{ и } \frac{0{,}3}{2{,}22} \approx 0{,}135.$$

В данном условии мы поставили знак равенства, предполагая, что у нас приплод телочек в расчете на одну корову составляет строго 0,45 головы. Однако ставить знак равенства в аналогичных условиях не всегда целесообразно. Действительно, ведь количество телочек может быть и более чем 0,45 головы и менее этой величины в расчете на одну корову. Поэтому в конкретных задачах запись данного условия может быть и такая:

$$0{,}45x_1 - x_2 \geqslant 0, \text{ или } 0{,}45x_1 - x_2 \leqslant 0.$$

В равной степени, как и $x_1 - 2{,}22x_2 \geqslant 0$, и $x_1 - 2{,}22x_2 \leqslant 0$. В первом случае предполагается, что выход телочек может быть не более 0,45 в расчете на одну корову, а во втором случае — не менее чем 0,45. Во всех случаях коэффициент при x_1, равный 0,45, или при x_2, равный 2,22, и есть коэффициент k_{ij}, который введен во второе условие структурной модели.

Смысл ограничений третьего вида ($a_{i\,\min} \leqslant x_j \leqslant a_{i\,\max}$) также пояснялся ранее на примере других задач. Это условие означает, что на любую j-вую половозрастную группу скота могут быть наложены ограничения снизу и сверху, то есть доля конкретной группы скота в стаде может быть не ниже или не выше некоторой величины.

В самом общем виде эта мысль может быть проиллюстрирована хотя бы тем, что доля любой группы скота в стаде должна находиться в естественных пределах между нулем и единицей, то есть $0 \leqslant x_j \leqslant 1$. Однако границы некоторых групп могут быть сжаты в значительно более узкие пределы. Например, из хозяйственной целесообразности ясно, что держать в хозяйствах молочно-мясного направления, скажем, 4—5% быков-производителей явно нерационально. Но в то же время установлено, что какова бы структура стада ни была, доля быков-производителей не должна превышать, например, 1,5%, но и не быть ниже 0,6% от общей структуры стада. В долях это выразится так: доля быков-производителей должна составлять не менее 0,006 и не более 0,015 от общей величины стада. Таким образом, если, скажем, в нашей задаче долю быков-производителей мы обозначили через x_5, то следует записать, что $0{,}006 \leqslant x_5 \leqslant 0{,}015$.

Построение матрицы задачи оптимизации структуры стада с описанными выше типичными условиями относительно несложно. Это объясняется прежде всего небольшой размерностью задачи. Приведем принципиальную схему матрицы такой задачи (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Принципиальная схема матрицы задачи оптимизации структуры стада скота и птицы

№ п/п	Ограничения	Половозрастные группы (в долях)								Объемы и виды ограничений
		x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_j	...	x_n	
1	На все стадо	1	1	1	1	...	1	...	1	$=1$
2	Соотношения между x_1 и x_2	$к_{21}$	-1							$\geqslant 0$
3	Между x_3 и x_4			$к_{33}$	-1					$\leqslant 0$
4	Между x_1, x_2, x_3 и x_j	1	1	1			$-к_{4j}$			$\geqslant 0$
...	....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	Верхний предел на четвертую группу в стаде				1					$\leqslant a_{max}$
$i+1$	Нижний предел на четвертую группу в стаде				1					$\geqslant a_{min}$
...	....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$к-1$	Верхний предел на n-ую группу в стаде								1	$\leqslant a_{max}$
$к$	Нижний предел на n-ую группу в стаде								1	$\geqslant a_{min}$
$m+1$	Целевая функция	c_1	c_2	c_3	c_4	...	c_j	...	c_n	$\rightarrow \max$

В зависимости от специфических условий хозяйства матрица должна конкретизироваться и уточняться. Соотношения по связи между отдельными группами скота также должны уточняться в соответствии с зоотехническими и экономическими условиями и характером задачи, то же самое относится к оценкам целевой функции, характеру и виду всех ограничений, величинам связывающих коэффициентов (k_{ij}).

Приведем пример, показывающий возможность практического проведения расчетов по оптимизации структуры стада на основе приведенной выше модели. Смысл задачи заключается в необходимости определения оптимальной структуры стада крупного рогатого скота для колхозов Орловской области. В основу этого расчета легли усредненные данные годовых отчетов колхозов этой области за 1967—1969 гг., исходя из сложившейся структуры стада, материально-денежных затрат на производство молока, говядины и всей валовой продукции скотоводства в оценке по закупочным ценам 1965 г.

Градация половозрастных групп скота установлена согласно соответствующей форме статистической отчетности по животноводству. Размеры половозрастных групп устанавливались в зависимости от многих факторов и прежде всего обусловливались уровнем специализации и удельным весом маточного поголовья. В качестве критерия оптимальности принят показатель, характеризующий максимальный уровень условного чистого дохода.

Принцип обоснования уровня затрат и выхода валовой продукции в расчете на один процент структуры стада по половозрастным группам приводится в таблице 6.3, а схема матрицы задачи — в таблице 6.4.

Результаты расчетов задачи на ЭВМ показали, что оптимальной является следующая структура: быки-производители (x_1) — 1%, коровы (x_2) — 50%, нетели (x_3) — 9%, телки старше 1 года (x_4) — 10%, телки до 1 года (x_5) — 15%, бычки старше 1 года (x_6) — 1%, бычки до 1 года (x_7) — 14%.

При такой структуре стада чистый доход в расчете на условную голову увеличивается в среднем на 7,5 руб. в год по сравнению с чистым доходом при фактически имевшейся структуре стада.

Аналогично могут конструироваться и другие модели, отражающие более сложные зоотехнические связи. Такая задача приводится, например, в учебном пособии М. Е. Браславца «Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства» («Экономика», 1971). Мы воспроизведем ее здесь без комментариев с тем, чтобы читатель мог срав-

Таблица 6.3

Расчет затрат и выхода валовой продукции крупного рогатого скота на одну структурную голову

Показатели	Бычки производители	Коровы	Нетели	Телки		Бычки и кастраты		Итого
				старше 1 года	до 1 года	старше 1 года	до 1 года	
Количество голов	9 450	339 739	49 796	116 011	162 052	38 079	162 274	877 397
Процент	1	39	6	13	18	4	19	100
Количество условных голов	7 371	339 739	30 376	62 646	61 580	20 563	61 815	584 090
Размер фактических денежно-материальных затрат на каждую половозрастную группу скота (руб.)	2 460	113 413	10 140	29 911	20 555	6 864	20 634	194 977
То же, на 1% структуры	2 460	2 908	1 690	1 609	1 142	1 716	1 086	1 949
Стоимость валовой продукции на половозрастную группу (руб.)	2 555	117 767	10 528	21 713	21 344	7 127	21 421	202 459
То же, на 1% структуры	2 555	3 019	1 754	1 670	1 186	1 782	1 128	2 024

Таблица 6.4

Матрица задачи для расчета оптимальной структуры стада крупного рогатого скота (%)

№ п/п	Показатели	Быки-производители (x_1)	Коровы (x_2)	Нетели (x_3)	Телки		Бычки-кастраты		Общие затраты руб. (x_8)	Ограничения
					старше 1 года (x_4)	до 1 года (x_5)	старше 1 года (x_6)	до 1 года (x_7)		
1	Вся структура (%)	1	1	1	1	1	1	1		$=100$
2	x_1	1								$\geqslant 0{,}5$
3	x_1	1								$\leqslant 1{,}0$
4	x_2		1							$\geqslant 35$
5	x_2		1							$\leqslant 50$
6	x_3			1						$\geqslant 8$
7	x_3			1						$\leqslant 10$
8	x_4				1					$\geqslant 9$
9	x_4				1					$\leqslant 12$
10	x_5					1				$\geqslant 15$
11	x_5					1				$\leqslant 18$
12	x_6						1			$\geqslant 1$
13	x_6						1			$\leqslant 12$
14	x_7							1		$\geqslant 14$
15	x_7							1		$\leqslant 19$
16	Затраты (руб.)	2460	2908	1690	1609	1142	1716	1086	-1	$\leqslant 0$
17	Условный чистый доход (руб.)	2555	3019	1754	1670	1186	1782	1128	-1	$\rightarrow \max$

Таблица 6.5

Матрица экономико-математической задачи для определения оптимальной структуры стада крупного рогатого скота

№ п/п	Переменные — группы скота в структуре стада (доли) / Ограничения и целевая функция	Коровы x_1	Быки-производители x_2	Нетели x_3	Бычки до 6 месяцев x_4	Телочки до 6 месяцев x_5	Бычки от 6 до 12 месяцев x_6	Телочки от 6 до 12 месяцев x_7	Бычки от 12 до 18 месяцев x_8	Телочки от 12 до 18 месяцев x_9	Скот на откорме x_{10}	Объемы ресурсов и виды ограничений
1.	Состав всего стада (доли)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	=1
2.	Соотношения между:											
	x_1 и x_3	0,1855		—1								$\leqslant 0$
3.	x_2 и x_8		0,257						—1			$\leqslant 0$
4.	x_1, x_4 и x_5	—0,5			1	1						$\leqslant 0$
5.	x_4, x_5, x_6 и x_7				—1	—1	1	1				$\leqslant 0$
6.	x_3 и x_9			1						—0,94		$\leqslant 0$
7.	x_4 и x_6				—0,94		1					$\leqslant 0$
8.	x_5 и x_7					—0,94		1				$\leqslant 0$
9.	x_6 и x_8						—0,94		1			$\leqslant 0$
10.	x_7 и x_9							—0,94		1		$\leqslant 0$
11.	Зависимость по выбраковке	—0,0855	—0,157						—0,94	—0,94	1	$\leqslant 0$
12.	Соотношения между x_4 и x_5				1	—1						$\leqslant 0$
13.	Прибыль (руб.)	138,95	—113,4	44,33	103,43	68,97	103,43	56,14	103,43	44,33	94,56	$\to$ max

нить упрощенную и более сложную матрицу аналогичных задач и чтобы по принципу ее построения он смог выполнить одно из нижеследующих заданий. По этой матрице (см. таблицу 6.5) проводились расчеты по определению оптимальной структуры стада крупного рогатого скота в совхозах Белгород-Днестровского мясо-молочного треста. Решение этой задачи также показало высокую эффективность оптимизации структуры стада. Так, при оптимальной структуре стада общая прибыль в целом по тресту возрастает на 2,5 млн. руб. по сравнению с той, которая была при фактической структуре стада крупного рогатого скота.

§ 3. Краткие выводы, методические советы и задания

Представленные выше задачи по расчету оптимальной структуры стада сельскохозяйственных животных и птицы имеют большое практическое значение. При их изучении особое внимание надо обратить на правильную формулировку задачи с учетом направления развития хозяйства. В одних хозяйствах такие задачи следует ставить для расчета оптимальной структуры стада крупного рогатого скота, в других — для расчета оптимальной структуры стада свиней, овец, птицы. В хозяйствах, имеющих различные отрасли животноводства, целесообразно ставить аналогичные задачи по конкретным видам скота и птицы.

Наибольшую трудность в таких задачах вызывает запись условий по связи между половозрастными группами скота (птицы). Поэтому расчет коэффициентов матрицы задачи и осуществление балансовых увязок экономисты должны проводить совместно с зоотехниками, учитывая процент выбраковки и темп расширения стада.

На первых этапах следует построить наиболее простую матрицу, отразив в ней основные, наиболее важные ограничения и связи, и уж после этого матрицу можно усложнять. Перед тем как приступить к заполнению матрицы коэффициентами, целесообразно посмотреть, какие половозрастные группы можно объединить, а какие не учитывать. Большую трудность в таких задачах вызывает расчет коэффициентов целевой функции (оценок эффективности), поскольку они определяются не непосредственно на голову скота, а в расчете на одну долю, один процент конкретной половозрастной группы. Поэтому целесообразно построить принципиальную таблицу, с помощью которой можно проводить такие расчеты.

Задание 1. *Задача 6.01.* В хозяйстве молочно-картофелеводческого направления структура стада крупного рогатого скота представлена следующими половозрастными группами: быки-производители, коровы, нетели, телки до 1 года, телки старше 1 года, бычки-кастраты до 1 года, бычки-кастраты старше 1 года.

Исходя из специфики хозяйства и экономической целесообразности, заранее определено, что в структуре стада быки-производители должны занимать от 0,6 до 1,1%, коровы — от 30 до 60%, нетели — от 10 до 12%, телки до 1 года — от 15 до 16%, телки старше 1 года — от 8 до 12%, бычки-кастраты до 1 года — от 12 до 14%, бычки-кастраты старше 1 года — от 1 до 10%. Затраты и выход валовой продукции в расчете на 1% структуры стада по половозрастным группам соответственно составляют (руб.): быки-производители — 2260 и 2655, коровы — 2900 и 3042, нетели — 1600 и 1784, телки до 1 года — 1240 и 1480, телки старше 1 года — 1600 и 1690, бычки-кастраты до 1 года — 1286 и 1428, бычки-кастраты старше 1 года — 1700 и 1780 руб.

Составьте матрицу экономико-математической задачи для определения оптимальной структуры стада крупного рогатого скота.

При выполнении задачи 6.01 можно воспользоваться схемой матрицы, представленной в таблице 6.4.

Задача 6.02. Исходя из условий задачи 6.01, необходимо ввести систему обозначений, построить структурную и развернутую модели экономико-математической задачи по определению оптимальной структуры стада крупного рогатого скота и пояснить смысл каждого условия.

Задание 2. *Задача 6.03.* В хозяйстве мясо-молочного направления в стаде крупного рогатого скота выделено десять половозрастных групп: коровы, быки-производители, нетели, бычки до шестимесячного возраста, телочки до шестимесячного возраста, бычки от 6 до 12 месяцев, телочки от 6 до 12 месяцев, бычки от 1 до 1,5 года, телочки от 1 до 1,5 года, взрослый скот на откорме.

Темп расширения основного стада (ежегодный прирост) составляет 20%, выбраковка коров — 10%, вы-

Таблица 6.6

Матрица экономико-математической задачи для определения оптимальной структуры стада крупного рогатого скота

№ п/п	Переменные — группы скота в структуре стада / Ограничения и целевая функция	Коровы x_1	Быки-производители x_2	Нетели x_3	Бычки до 6 месяцев x_4	Телочки до 6 месяцев x_5	Бычки от 6 до 12 месяцев x_6	Телочки от 6 до 12 месяцев x_7	Бычки от 1 до 1,5 года x_8	Телочки от 1 до 1,5 года x_9	Взрослый скот на откорме x_{10}	Объемы и виды ограничений
1	Состав всего стада	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	=1
2	Соотношения между: x_1 и x_3	0,30		—1								⩽0
3	x_2 и x_8		0,40						—1			⩽0
4	x_1, x_4 и x_5	—0,5			1	1						⩽0
5	x_4, x_5, x_6 и x_7				—1	—1	1	1				⩽0
6	x_3 и x_9			1						—0,95		⩽0
7	x_4 и x_6				—0,95		1					⩽0
8	x_5 и x_7					—0,95		1				⩽0
9	x_6 и x_8						—0,95		1			⩽0
10	x_7 и x_9							—0,95		1		⩽0
11	Соотношение по выбраковке	—0,10	—0,20						—0,95	—0,95	1	⩽0
12	Соотношения по выбраковке				1	—1						⩽0
13	Условная прибыль (руб.)	150,0	-100,0	50,0	110,0	70,0	110,0	60,0	110,0	50,0	95,0	→ max

браковка быков-производителей — 20%. Коэффициент выживаемости телят 95%, вероятность рождения телочек и бычков одинаковая, но выбраковка бычков до 6 месяцев должна быть не ниже выбраковки телочек этого возраста.

Условная прибыль в расчете на единицу скота конкретной половозрастной группы составляет (руб.): коровы — 150, быки-производители — убыток 100, нетели — прибыль 50, бычки до 6 месяцев — 110, телочки до 6 месяцев — 70, бычки от 6 до 12 месяцев — 110, телочки от 6 до 12 месяцев — 60, бычки от 1 до 1,5 года — 110, телочки от 1 до 1,5 года — 50, скот на откорме — 95.

Составьте матрицу экономико-математической задачи для расчета оптимальной структуры стада крупного рогатого скота.

Задача 6.04. На основании условий задачи 6.03 запишите развернутую и структурную экономико-математическую модель задачи, пояснив экономический смысл переменных, ограничений и коэффициентов.

Задание 3. Проанализируйте матрицу, представленную в таблице 6.6. Установите, в каких единицах представлены половозрастные группы скота в стаде; определите, чем отличается эта матрица от матрицы, представленной в таблице 6.5; сравните содержание и оформление матрицы, которую вы построили, выполняя задачу 6.03, с приведенной здесь.

ГЛАВА 7
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ РАЦИОНОВ КОРМЛЕНИЯ СКОТА

Влияние кормления на развитие и продуктивность животных весьма многообразно и многосторонне. Кормление непосредственно влияет на физиологические особенности животных: пищеварительную систему, рост, развитие, вес и продуктивность. От кормления зависят воспроизводительные способности животных, а также количество и качество производимых продуктов животноводства.

Для того чтобы наилучшим образом использовать корма и добиться их наивысшей окупаемости, необходимо кормление животных организовать на научной основе.

§ 1. Постановка задачи

В практике зоотехнии, как известно, имеются разработанные рационы, нормы кормления скота и кормовые смеси, которые применительно к специфике хозяйств конкретизируются и уточняются. Зоотехнической наукой и практикой также доказано, что кормление и содержание животных необходимо дифференцировать в зависимости от возрастных особенностей и продуктивности скота, его породы и производственного направления. Тем не менее нередко получается так, что скот различных половозрастных групп содержится на одних и тех же рационах.

Перед животноводами и экономистами стоит проблема составления научно обоснованных рационов кормления скота и птицы, полностью сбалансированных по содержанию в них кормовых единиц, переваримого протеина, кальция, фосфора, каротина, аминокислот и микроэлементов. Такие рационы (полностью сбалансированные в отношении энергетического, протеинового, макроэлементного, аминокислотного и микроэлементного состава и позволяющие добиваться наивысшего экономического эффекта) называются оптимальными.

Необходимость составления оптимальных рационов очевидна. Она обусловлена требованием полноценного кормления животных и стремлением добиваться максимальной продуктивности скота и птицы при возможно наименьших затратах труда, денежно-материальных средств, кормов и т. п. на их содержание. Кроме того, часто в различных кормах содержатся одинаковые кормовые компоненты, но в неодинаковом количестве. Поэтому одни корма могут заменять другие. Однако экономически такая замена оправдана лишь в определенных случаях — когда стоимость единицы питательности корма ниже стоимости соответствующей единицы другого корма.

Оптимальные рационы можно рассчитывать, опираясь только на применение экономико-математических методов и используя электронно-вычислительные машины. Экспериментальные исследования, проведенные в ряде колхозов и совхозов, свидетельствуют о том, что оптимальное планирование использования кормов дает высокую экономическую эффективность. Так, например, при расчете кормовых рационов для молочных коров колхоза имени Карла Либкнехта Одесской области получена экономия 16,72 руб. на ферму в сутки по сравнению с фактической затратой кормов при кормлении животных по рационам, составленным зоотехником обычными методами.

При расчетах кормовых рационов и смесей на ЭВМ приходится пользоваться данными о питательности различных кормов и предполагать линейную зависимость между количеством питательных веществ, потребляемых животными, и их продуктивностью. Можно оспаривать достоверность данных о содержании питательных веществ в различных кормах. Такие возражения небезосновательны. В одних и тех же кормах, как правило, содержится неодинаковое количество питательных веществ. Оно зависит от почвенных и климатических условий местности, от сортов и сроков уборки, от времени и способов хранения. Однако все это не может служить препятствием для расчетов рационов кормления на ЭВМ, так как в каждом хозяйстве можно сделать анализ кормов и установить их истинное кормовое достоинство. Даже в условиях недостаточной кормовой базы также следует находить наилучшие варианты рационов.

Таким образом, возникает необходимость решения чрезвычайно важной в практическом отношении задачи, смысл которой сводится к следующему.

Учитывая физиологические особенности животных, специфику хозяйства, состояние кормовой базы, необходимо составить такие рационы кормления скота, которые бы вполне удовлетворяли животных в питательных веществах при соблюдении зоотехнических требований кормления, а хозяйство от этого имело бы наивысший экономический эффект, находящий свое выражение в конкретном критерии оптимальности рационов (например, в их минимальной себестоимости).

По своей постановке такая задача полностью соответствует схеме классической задачи определения наилучшей комбинации использования ресурсов при некоторых, заранее заданных, ограничениях и целевой функции. Условия такой задачи могут быть записаны в виде линейных соотношений. Решается она с помощью любой модификации симплексного метода.

§ 2. Подготовка исходных данных

Прежде чем построить модель задачи, устанавливают, для какого вида животных и половозрастных групп, на какой период требуется рассчитать рацион кормления. Затем определяют продуктивность животных в этом периоде и с учетом ее рассчитывают по существующим нормам кормления, сколько и каких питательных веществ должно содержаться в рационе.

Затем устанавливают, какие корма произвело хозяйство, какие оно может приобрести, какими кормовыми добавками растительного и животного происхождения оно располагает и какие минеральные и химические добавки требуются для данного вида животных и половозрастной группы. После этого определяют содержание питательных веществ в кормах. Заканчивается подготовка информации установлением стоимости единицы каждого вида корма и кормовых добавок.

Обычно корма, производимые в хозяйстве, оценивают по себестоимости, а поступаемые со стороны — по ценам приобретения.

Рассмотрим порядок подготовки исходной информации на конкретном примере. Для сокращения размерности экономико-математической задачи будем учитывать не все ингредиенты питания, а только основные из них.

Расчет оптимальных кормовых рационов кормления и методику решения задачи покажем на примере оптимизации рациона для дойной коровы, живой вес которой 430—450 кг, суточный удой молока 10 кг, при жирности 4%, в стойловый период в совхозе «Березино» Одесской области.

Рацион должен полностью удовлетворять потребности животного в питательных веществах при необходимом соотношении отдельных видов кормов и одновременно иметь минимальную себестоимость.

Определим перечень переменных и ограничений для данной задачи. Основными переменными являются корма собственного производства и кормовые добавки. В этом хозяйстве на стойловый период 1967—1968 гг. было заготовлено 14 видов кормов. Количество кормов (в кг), которые могут войти в рацион коровы, обозначим: x_1 — дерть ячменная, x_2 — дерть кукурузная, x_3 —

дерть гороховая, x_4 — жмых подсолнечниковый, x_5 — комбикорм, x_6 — солома озимого ячменя, x_7 — солома овсяная, x_8 — солома просяная, x_9 — сено суданки, x_{10} — сено люцерновое, x_{11} — силос кукурузный, x_{12} — свекла сахарная, x_{13} — корнеплоды кормовые, x_{14} — тыква кормовая, x_{15} — кормовой преципитат.

Для обеспечения намеченной суточной продуктивности необходимо, чтобы в кормовом рационе коровы содержалось питательных веществ не менее 9,6 кормовой единицы, 1020 г переваримого протеина, 65 г кальция, 45 г фосфора и 400 мг каротина. В нем должно также содержаться не более 18 кг сухих веществ.

Удельный вес отдельных групп кормов в общей питательности рациона может колебаться в следующих пределах: концентратов 20—45%, сена 15—35%, корнеплодов и тыквы 6—15%, силоса 13—30% и соломы не более 15%. Минимально и максимально возможные суточные дачи отдельных групп кормов установлены на основе рекомендаций научных учреждений степной зоны УССР по кормлению крупного рогатого скота.

§ 3. Матрица и структурная модель задачи

Составим расширенную экономико-математическую модель, или просто матрицу задачи (табл. 7.1).

Согласно первому ограничению, корма, которые войдут в состав рациона, должны содержать не менее требуемого количества кормовых единиц, переваримого протеина, кальция, фосфора и каротина. Согласно второму условию, в рационе должно быть не более требуемого количества сухого вещества. Все эти условия записываются в виде подсистемы основных ограничений.

Вторую подсистему составляют дополнительные ограничения, которые задаются по группам кормов и определяют минимально и максимально допустимые суточные дачи.

В нашей задаче эти ограничения введены по концентратам, сену, кормовым корнеплодам, кормовой тыкве, силосу и соломе. Поскольку солома обходится дешево, ограничение по этой группе кормов задано только «сверху».

В соответствии с записью условий матрицы составим структурную модель данной задачи.

Таблица 7.1

Матрица задачи для расчета оптимального рациона кормления коровы весом 430—450 кг, средним суточным удоем 10 кг, жирностью молока 4% в стойловый период

№ п/п	Ограничения	Ед. изм.	Дерть ячменная	Дерть кукурузная	Дерть гороховая	Жмых подсолнечниковый	Комбикорм	Солома ячменная	Солома овсяная	Солома просяная
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	Кормовые единицы	кг	1,21	1,34	1,17	1,09	1	0,36	0,31	0,41
2	Переваримый протеин	г	81	78	195	396	0,12	12	14	24
3	Фосфор	»	3,3	3,1	4,2	9,9	13	1,2	1	0,9
4	Кальций	»	1,2	0,4	1,7	3,3	15	3,7	4,3	6,4
5	Каротин	мг	1	4	1	2	0	4	4	10
6	Сухих веществ	кг	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,80	0,80	0,80
7	Концентраты	кг. корм. ед.	—1,21	—1,34	—1,17	—1,09	—1	0	0	0
8	Концентраты	то же	1,21	1,34	1,17	1,09	1	0	0	0
9	Сено	» »								
10	Сено	» »								
11	Корнеплоды	» »	0	0	0	0	0	0	0	0
12	Корнеплоды	» »	0	0	0	0	0	0	0	0
13	Силос	» »	0	0	0	0	0	0	0	0
14	Силос	» »	0	0	0	0	0	0	0	0
15	Солома	» »	0	0	0	0	0	0,36	0,31	0,41
16	Общее количество кормовых единиц	кг								
	Себестоимость	коп.	2,45	2,79	4,75	6	8	0,38	0,43	0,68

№ п/п	Ограничения	Сено суданки x_9	Сено люцерновое x_{10}	Силос кукурузный x_{11}	Свекла сахарная x_{12}	Корнеплоды кормовые x_{13}	Тыква кормовая x_{14}	Преципитат x_{15}	Кормовые единицы x_{16}	Потребность в ресурсах и тип ограничений
1	Кормовые единицы	0,52	0,49	0,20	0,26	0,12	0,13	0	—1	=0
2	Переваримый протеин	65	116	14	12	9	7	0	0	⩾1020
3	Фосфор	2,3	2,2	0,5	0,5	0,4	0,4	170	0	⩾45
4	Кальций	5,7	17,7	1,5	0,5	0,4	0,3	260	0	⩾65
5	Каротин	15	45	15	0	0	15	0	0	⩾400
6	Сухих веществ	0,85	0,85	—0,26	0,24	0,12	0,24	0	0	⩽12
7	Концентраты	0	0	0	0	0	0	0	0,2	⩽0
8	Концентраты	0	0	0	0	0	0	0	—0,45	⩽0
9	Сено	—0,52	—0,49	0	0	0	0	0	0,15	⩽0
10	Сено	0,52	0,49	0	0	0	0	0	—0,35	⩽0
11	Корнеплоды	0	0	0	—0,26	—0,12	—0,13	0	—0,15	⩽0
12	Корнеплоды	0	0	0	0,26	0,12	0,13	0	—0,13	⩽0
13	Силос	0	0	—0,20	0	0	0	0	0,13	⩽0
14	Силос	0	0	0,20	0	0	0	0	—0,30	⩽0
15	Солома	0	0	0	0	0	0	0	—0,15	⩽0
16	Общее количество кормовых единиц								1	⩾9,6
	Себестоимость	1,95	0,53	0,8	1,26	1,17	1,21	5		→ min

Примем следующие обозначения:

j — индекс вида корма ($j=1, 2, \ldots, 16$);

i — индекс ограничения ($i=1, 2, \ldots, 16$);

x_j — количество корма j-го вида, входящего в рацион;

c_j — себестоимость или цена приобретения единицы j-го вида корма;

a_{ij} — содержание i-го питательного вещества в единице j-го вида корма;

B_i — минимально допустимое количество i-го питательного вещества в рационе;

Q_i — максимально возможно содержание i-го питательного вещества в рационе;

$Q_{i\,\min}$, $Q_{i\,\max}$ — соответственно минимально допустимое и максимально возможное содержание кормовых единиц в рационе от конкретной группы кормов;

L — стоимость оптимального рациона.

На основании этих ограничений построим конкретную модель задачи в структурной форме.

Найти $L=\sum\limits_{j=1}^{15} c_j x_j \longrightarrow \min$

(минимальная стоимость рациона)
при условиях:

$$1)\ \sum_{j=1}^{15} a_{ij}x_j - x_{16} = 0 \quad (i=1)$$

(общее соотношение по содержанию в рационе кормовых единиц);

$$2)\ \sum_{j=1}^{15} a_{ij}x_j \geqslant B_i \quad (i=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 16)$$

(содержание i-ых питательных веществ в рационе должно быть не ниже определенной величины);

$$3)\ \sum_{j=1}^{15} a_{ij}x_j \leqslant Q_i \quad (i=6)$$

(содержание сухих веществ в рационе не должно превышать максимальную норму);

$$4)\ Q_{i\,\min} \leqslant \sum_{j=1}^{15} a_{ij}x_j \leqslant Q_{i\,\max}. \quad (i=7—15)$$

(содержание кормовых единиц в рационе по отдельным группам кормов должно находиться в заранее установленных пределах);

$$5)\quad x_j \geqslant 0$$

(условие неотрицательности переменных).

Четвертое ограничение вводится в модель для того, чтобы ограничить содержание отдельных групп кормов (концентрированные, грубые, сочные и т. п.) в рационе.

§ 4. Анализ решения задачи

В результате решения задачи на ЭВМ «Минск-22» получен оптимальный рацион кормления коровы. В его состав вошли корма в следующем количестве: дерть кукурузная — 2,58 кг, солома ячменная — 3,6 кг, сено люцерновое — 6,18 кг, силос кукурузный — 6,49 кг, свекла сахарная — 2 кг и преципитат кормовой — 0,087 кг. Себестоимость рациона составляет 20,9 коп.

Корма, вошедшие в оптимальный рацион, содержат питательных веществ не менее требуемого количества. Соблюдены условия по структуре рациона. Удельный вес отдельных групп кормов составляет: концентратов — 36%, сена — 31%, соломы — 13,5%, силоса — 13,5% и корнеплодов — 6%.

Последняя симплексная таблица задачи, выданная ЭВМ на печать, в которой содержатся результаты расчета, приведена в таблице 7.2.

Все числа конечной симплексной таблицы являются коэффициентами структурных сдвигов, или коэффициентами замещения. Их можно использовать при внесении корректировки в полученный оптимальный рацион. С их помощью можно определять, в каком количестве можно изменить объем кормов в рационе, чтобы не были нарушены первоначально сформулированные условия задачи.

Проверим, удовлетворяются ли требования, поставленные при составлении рациона. Для наглядности сведем результаты проверки решения задачи в таблицу 7.3.

Из таблицы 7.3 видно, что лимитирующими ресурсами в оптимальном рационе являются кормовые единицы и каротин, поскольку именно они содержатся в рационе на уровне минимально допустимой нормы.

Таблица 7.2

Последняя симплексная таблица по расчету рациона кормления коровы

№ п/п	Базис	c_j	p_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	x_{33}		−0,7783	−0,0055	—	−0,0052	−0,0026	−0,0063		0,0012
2	x_{10}	0,53	6,1771	−0,0434		−0,0415	−0,0209	−0,0497		0,0092
3	x_{24}	0	5,4551	0,1288		0,1527	0,1836	0,2715		0,1017
4	x_2	2,79	2,5821	0,9352	1	0,9039	0,8289	0,7831		−0,0069
5	x_{29}	0	0,4316	−0,706		−0,0673	−0,0339	−0,0806		0,0150
6	x_{30}	0	1,7296	−0,0122		−0,0116	−0,0058	−0,0139		0,0026
7	x_{28}	0	1,7304	0,0554		0,528	0,0266	0,0633		−0,0118
8	x_{12}	1,26	1,9956	−0,0140		−0,0134	−0,0067	−0,0160		0,0030
9	x_{11}	0,80	6,4859	−0,0456		−0,0435	−0,0219	−0,0521		0,0097
10	x_{18}	0	55;9363	−0,0014		−130,367	−334,298	53,9320		−2,8930
11	x_{15}	5,0	0,0873	0,0033		0,0091	0,0436	0,0632		−0,0003
12	x_{35}	0	1,2972	−0,0091		−0,0087	−0,0044	−0,0104		0,0019
13	x_{16}	0	9,6	−0,0608		−0,0580	−0,0229	−0,0695		0,0129
14	x_{19}	0	92,1249	−0,9128		0,1316	0,0791	0,6828		−0,9862
15	x_6	0,38	3,6033	−0,0253		−0,0242	−0,0122	−0,0290	1	0,8665
16	x_{17}	0	0,1	−0,03		−0,05	−0,07	−0,07	0	0,01
L	$m+1$		20,9	0,2761	0	2,67	0	0	0	0

№ п/п	Базис	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
1	x_{33}	0,0114	—0,0687				—0,00001	0,0314		
2	x_{10}	0,0906	0,5164	1			—0,00004	0,2495		
3	x_{24}	—0,2037	0,5047				0,0092	—0,1350		
4	x_2	—0,0672	0,4042				0,00001	—0,1851		
5	x_{29}	0,1471	0,8849				—0,00001	0,4052		
6	x_{30}	0,0254	—0,1526				—0,00001	0,0699		
7	x_{28}	—0,1154	0,6942				0,00001	—0,3179		
8	x_{12}	0,0293	—0,1760			1	0,4615	0,5806		
9	x_{11}	0,0951	—0,5721		1		—0,00001	0,2620		
10	x_{18}	—2,7514	12,4876				—3,4615	19,8889		
11	x_{15}	—0,0034	0,0039				0,00099	—0,001	1	
12	x_{35}	0,0190	—0,1144				0,00001	—0,0524		
13	x_{16}	0,1268	—0,7628				—0,00001	0,3493		1
14	x_{19}	—1,1492	2,4985				0,0896	5,0025		
15	x_6	1,1917	—0,3178				—0,00001	0,1455		
16	x_{17}	0,1	—0,6				0	0,02		
L	$m+1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 7.3

Проверка результатов решения задачи

Переменные	Корма, составляющие оптимальный рацион	Количество кормов в рационе (кг)	Содержится в них питательных веществ					
			корм. ед. (кг)	переваримого протеина (кг)	кальция (г)	фосфора (г)	каротина (мг)	сухого вещества (кг)
x_2	Дерть кукурузная	2,58	3,457	0,201	1,032	7,998	10,32	2,244
x_6	Солома ячменная	3,60	1,296	0,043	13,32	4,320	14,40	2,880
x_{10}	Сено люцерновое	6,18	3,023	0,716	109,2	13,574	277,65	5,244
x_{11}	Силос кукурузный	6,49	1,298	0,09	9,735	3,245	97,35	1,687
x_{12}	Свекла сахарная	2,00	0,52	0,024	1,0	1,000	0	0,48
x_{15}	Кормовой преципитат	0,087			20,8	14,790		
	Итого питательных веществ		9,6	1,07	155	45,93	400	12,64
	Потребность в питательных веществах		9,6	1,02	65	45	400	12
	Превышение потребности		—	0,05	90	0,93	—	—0,64

§ 5. Краткие выводы, методические советы и задания

Изучая данную тему, необходимо прежде всего уяснить, что вопрос организации рационального кормления сельскохозяйственных животных занимает одно из важнейших мест в деле развития животноводства и увеличения производства животноводческой продукции. Основная задача здесь заключается в том, чтобы, с одной стороны, обеспечить скот всеми необходимыми кормами с учетом его физиологических особенностей (по видам и по питательности), а с другой — чтобы эти рационы были по возможности дешевыми и соответствовали повышению продуктивности скота. После уяснения смысла задачи следует приступить к рассмотрению источников статистических и нормативных данных о кормовой базе, кормовых ресурсах и их использовании, потребностях животных в кормах, в том числе по отдельным элементам питания.

Далее необходимо изучить порядок соизмерения различных видов кормов, правила построения математической модели и матрицы экономико-математической задачи о рациональном использовании кормов.

Особое внимание следует уделить правильной постановке задачи, выбору переменных и ограничений, обоснованию и математической записи критериев оптимальности задачи. При этом целесообразно определить, для какого вида скота в условиях конкретного хозяйства наиболее актуальна постановка задачи по оптимизации кормовых рационов.

Задание 1. *Задача 7.1.* Для составления рациона коров живым весом 475—500 кг, средним суточным удоем 10 кг, жирностью молока 3,8—4% в стойловый период в хозяйстве имеются следующие корма: концентраты (зерно и зерновая мука, отруби пшеничные, комбикорма), силосные и сочные (силос кукурузный, жом кислый, кормовые клубнеплоды, картофель), грубые (сено многолетних трав, сено однолетних трав, солома), животного происхождения (мясо-костная мука, фосфат).

Установлено, что в суточном рационе коров должно быть не менее: 11,7 кг кормовых единиц, 1280 г переваримого протеина, 80 г кальция, 55 г фосфора, 491 мг каротина. Отруби в рационе могут составлять от 1 до 3,5 кг, комбикорма — от 0,5 до 3 кг, силос кукурузный —

от 5 до 30 кг, жом — от 10 до 30 кг, кормовые клубнеплоды — от 5 до 30 кг, картофель — от 5 до 25 кг, сено многолетних трав — от 2 до 6 кг, сено однолетних трав — от 2 до 6 кг. На зерно и зерновую муку, солому, мясо-костную муку и фосфат дополнительные ограничения не накладываются.

Себестоимость 1 кг кормов составляет (коп.): зерно и зерновая мука — 5,5, отруби пшеничные — 4, комбикорма — 7,6, силос кукурузный — 1,2, жом кислый — 1, кормовые корнеплоды — 2, картофель — 4,7, сено многолетних трав — 2,5, сено однолетних трав — 2,8, солома — 0,5, мясо-костная мука — 18, фосфат — 5. Содержание питательных веществ в единице корма представлено в таблице 7.4.

Составьте матрицу экономико-математической задачи для определения оптимальных рационов кормления коров. В качестве критерия оптимальности рациона следует взять его минимальную себестоимость. Поясните, каким методом наиболее целесообразно решить данную задачу.

Задача 7.2. На основании условий задачи 7.1 примите систему обозначений, составьте развернутую и структурную модели, пояснив экономический смысл каждого условия.

Задание 2. *Задача 7.3.* В соответствии с научно разработанными рекомендациями суточные рационы супоросных свиноматок старше двух лет весом 200 кг включают следующие корма, имеющиеся в хозяйстве: смесь концентратов, сахарная свекла, силос комбинированный, сенная мука и минеральные добавки (преципитат кормовой и мясо-костная мука). Тип кормления — второй (для центра нечерноземной зоны), при котором концентрированные корма должны составлять в рационе не менее 55 и не более 65% от минимально допустимой потребности в объеме кормовых единиц. Установлено, что в суточном рационе свиней должно быть не менее 3,9 кг кормовых единиц, 430 г переваримого протеина, 23 г кальция, 17 г фосфора, 45 мг каротина. Себестоимость 1 кг корма составляет (коп.): смесь концентратов — 7, сахарная свекла — 1,4, силос комбинированный — 0,5, сенная мука — 2,2, преципитат кормовой — 5, мясо-костная мука — 40.

Содержание питательных веществ в 1 кг корма представлено в таблице 7.5.

Таблица 7.4

Содержание питательных веществ в 1 кг корма

Корма / Питательные вещества	Концентраты			Силосные и сочные корма				Грубые корма			Корма животного происхождения	
	зерно и зерновая мука	отруби пшеничные	комбикорма	силос кукурузный	жом кислый	кормовые клубнеплоды	картофель	сено многолетних трав	сено однолетних трав	солома	мясо-костная мука	фосфат
Кормовые единицы (кг)	1,21	0,71	0,90	0,20	0,10	0,12	0,30	0,52	0,47	0,22	0,89	—
Переваримый протеин (г)	81	126	120	14,0	8,0	9,0	16,0	79,0	68,0	5,0	377,0	—
Кальций (г)	1,2	1,8	1,5	1,5	1,2	0,4	0,2	9,3	6,4	4,2	52,0	3,0
Фосфор (г)	3,3	10,1	3	0,5	0,1	0,4	0,7	2,2	2,8	0,8	32,0	1,0
Каротин (мг)	1,0	4,0	—	15,0	—	—	—	25,0	25,0	1,0	—	—

Таблица 7.5

Содержание питательных веществ в 1 кг корма

Корма / Питательные вещества	Смесь концентратов	Сахарная свекла	Силос комбинированный	Сенная мука	Преципитат кормовой	Мясокостная мука
Кормовые единицы (кг)	0,9	0,25	0,2	0,4	—	0,89
Переваримый протеин (г)	130,0	12,0	15,0	65,0	—	0,37
Кальций (г)	1,6	0,6	1,6	9,6	260,0	515,0
Фосфор (г)	3,1	0,5	0,5	2,4	170,0	320,0
Каротин (мг)	—	—	15,0	25,0	—	—

Составьте матрицу экономико-математической задачи для определения оптимальных суточных рационов свиней. В качестве критерия оптимальности рационов возьмите показатель — минимальная себестоимость рациона.

Задача 7.4. Исходя из условий предыдущей задачи, введите систему обозначений и запишите развернутую и структурную модели. Введите дополнительные неизвестные, преобразующие неравенства развернутой модели в уравнения, и дайте их экономическую интерпретацию. Поясните экономический смысл каждого условия модели.

Таблица 7.6

Содержание питательных веществ в 1 кг корма

Питательные вещества	Кукуруза на силос	Концентраты	Сено	Солома
Кормовые ед. (кг)	0,2	1,2	0,49	0,2
Протеин (г)	15	81	250	5
Каротин (мг)	10	5	300	1

Задание 3. *Задача 7.5.* Определите такой кормовой рацион для коровы живым весом 450 кг, средним суточным удоем 10 кг, жирностью молока 3,9%, чтобы себестоимость его была минимальной. В хозяйстве имеются четыре вида кормов, себестоимость которых составляет (коп.): кукуруза на силос — 0,5, концентраты — 5, се-

но люцерновое — 3, солома озимая — 1. Содержание питательных веществ в 1 кг корма показано в таблице 7.6.

В рационе должно быть протеина ровно 1010 г, кормовых единиц не менее 10 кг и каротина не менее 330 мг.

ГЛАВА 8

ПОСТАНОВКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПО ОПТИМИЗАЦИИ СОЧЕТАНИЯ ОТРАСЛЕЙ В ХОЗЯЙСТВЕ

Сельскохозяйственные предприятия, как правило, имеют несколько отраслей, хотя каждое из них специализируется на производстве определенных продуктов. Установленное направление хозяйства подчас не совпадает с действительной специализацией. Причины этого различные: не всегда при установлении направления развития хозяйства в должной мере учитывались местные условия, необходимость обеспечения общества отдельными дефицитными и недостаточно эффективными сельскохозяйственными продуктами и т. п. Однако зачастую и в том случае, когда направление развития хозяйства идет правильно и процесс углубления специализации производства продолжается, хозяйство не имеет оптимальной специализации. Поэтому объективно возникает задача определения оптимальной, наилучшей структуры производства, позволяющей достичь наивысшего экономического эффекта. Такая задача особенно важна для тех хозяйств, где еще нечетко сложилась специализация производства, где нет ярко выраженной профилирующей отрасли или нескольких таких отраслей.

Под оптимальной специализацией подразумевается такая структура производства в хозяйстве, такое сочетание отраслей, которое соответствует природным, географическим и экономическим условиям хозяйства, отвечает интересам государства и позволяет достигнуть наивысшей эффективности производства.

Определение оптимального сочетания отраслей немыслимо без применения соответствующих экономико-математических методов и проведения необходимых расчетов на ЭВМ.

§ 1. Постановка задачи по определению оптимального сочетания отраслей

Постановка такой задачи может иметь два аспекта: аналитический и плановый. Если необходимо проанализировать, насколько правильно в данном хозяйстве определена структура производства,— задача носит аналитический характер. Если же поставлена цель определить оптимальную структуру производства, скажем, на 5 лет вперед — задача носит плановый характер.

Принципиальной разницы в постановке задачи, построении экономико-математической модели и оформлении матрицы, а тем более приемов расчета оптимального варианта структуры производства между этими видами задачи нет. Основное различие в нормативной базе. В первом случае пользуются фактически сложившимися нормативами, во втором — прогнозно-плановыми. Прежде чем рассчитывать оптимальное сочетание отраслей на перспективу, целесообразно построить модель и рассчитать задачу по фактическим данным, чтобы можно было заранее иметь представление об оптимальном сочетании отраслей, исходя из фактически сложившихся нормативов затрат, имеющихся ресурсов и т. п.

Общая постановка экономико-математической задачи по определению оптимальной структуры сочетания отраслей в хозяйстве на плановый период формулируется так.

Исходя из научно обоснованных прогнозно-плановых объемов ресурсов, которые предлагается иметь в хозяйстве на плановый период, и соответствующих нормативов затрат, необходимо определить такую структуру производства, которая бы полностью соответствовала политике государства в области производства и закупок сельскохозяйственной продукции, наилучшим образом учитывала природно-экономическую специфику хозяйства, способствовала наиболее рациональному использованию земли, труда, техники, материально-денежных и других средств производства и позволила хозяйству получить наивысший экономический эффект.

§ 2. Сбор и обработка исходной информации для составления матрицы задачи

Расчету оптимальной структуры производства предшествует строгая формализация важнейших стоимостных, продуктовых, земельных, трудовых и т. п. плановых балансов, которые затем сводятся в матрицу экономико-математической задачи.

В составлении матрицы задачи наблюдаются три этапа: а) составление эскиза матрицы; б) приведение эскиза матрицы в соответствие с имеющейся информацией; в) окончательная доводка и завершение составления матрицы.

Первый этап включает отбор наиболее важных переменных: видов производимой продукции, закупку техники, удобрений, кормов, объемов реализации продукции и т. п. Все это в дальнейшем отражается в сказуемом матрицы — по столбцам.

В подлежащем (строках) записывают важнейшие, лимитирующие производство, поступление и реализацию продукции, ресурсы, вводят дополнительные ограничения и т. п.

Второй этап в составлении матрицы включает отбор лишь тех видов неизвестных ограничений, по которым можно собрать необходимую информацию и рассчитать объемы ограничений. На этом же этапе производятся различного рода агрегирования, вводятся уравнения связи (например, выход соломы связывается с выходом зерна), отбирается приоритетность критериев оптимальности (если предполагается задачу решать по нескольким критериям), устанавливаются размеры матрицы и т. д.

На третьем этапе составления матрицы ее заполняют коэффициентами. На этом же этапе окончательно проверяют форму и содержание матрицы, проставляют оценки функционала и рассчитывают коэффициент заполняемости матрицы.

При разработке и составлении матрицы экономико-математической задачи должны соблюдаться следующие требования.

Во-первых, необходимо, чтобы содержание матрицы достаточно четко отражало смысл поставленной задачи и те важнейшие производственно-технологические процессы, которые внутренне присущи объекту и которые объективно будут проявляться в условиях практического внедрения оптимальной структуры.

Во-вторых, необходимо, чтобы в матрице были представлены по возможности все важнейшие балансовые соотношения. Очень важно при этом определить наиболее разумные пределы (размерность) матрицы. Так, небольшая матрица, размером (10×20) — 10 ограничений (строк) и 20 переменных (столбцов) — не позволяет достаточно полно и объективно подойти к описанию объекта, а оптимальная структура производства совхоза или колхоза, рассчитанная по такой матрице, вряд ли будет практически приемлема. В то же время большие размерности матрицы (300—400×500—600) делают ее труднообозримой, хотя и позволяют полно представить объект. Для практических расчетов в таких задачах наиболее рациональными являются матрицы размерностью 40—100×50—120. Они позволяют избежать крайне упрощенческого подхода, который неизбежно возникает в случае составления матриц малых размеров, и в то же время обойти те трудности, к которым могут привести расчеты оптимальных планов по матрицам излишне больших размеров. Однако необходимо иметь в виду, что размеры составляемой матрицы не могут шаблонно рекомендоваться — все зависит от цели, стоящей перед исследователями, специфики данного объекта, сроков, отводимых для подобной работы, нормативной базы, располагаемых средств и т. п.

Все переменные и ограничения матрицы целесообразно дифференцировать по группам. Так, в сказуемом при достаточно подробной и полной задаче должны быть представлены следующие группы переменных.

1. Производимая хозяйством продукция:

а) растениеводства;

б) животноводства;

в) прочая.

2. Закупаемая хозяйством у государства продукция:

а) машины и оборудование;

б) корма и семена;

в) минеральные удобрения;

г) прочая.

3. Распределение произведенной хозяйством продукции:

а) государству;

б) внутри хозяйства;

в) обменные операции;

г) прочее.

4. Капитальное строительство.

5. Производственно-финансовые показатели.

В подлежащем матрицы должны быть представлены такие группы ограничений.

1. Использование земельных угодий:

а) пашня;

б) сенокосы и пастбища;

в) многолетние насаждения;

г) прочие.

2. Использование живого труда:

а) всего;

б) по периодам.

3. Использование техники вообще или по видам:

а) всего;

б) по периодам.

4. Корма:

а) по видам;

б) по питательности.

5. Использование удобрений по видам:

а) органические;

б) минеральные.

6. Использование складских и производственных построек.

7. Распределение продукции.

8. Связывающий блок.

9. Прочие материально-денежные балансы.

10. Критерий оптимальности.

Конкретизация показателей этих групп осуществляется исходя из специфики данного объекта, его производственного направления, узких мест в хозяйстве и целей, которые преследуются при составлении задачи.

В наиболее простых задачах, особенно в тех, которые составляются на первой стадии ознакомления с экономико-математическими методами, целесообразно из перечисленных групп в сказуемом оставить лишь первую, которая непосредственно отражает структуру производимой продукции и специализацию хозяйства. А в подлежащем — шесть первых групп, которые отражают основные ограничения, и специальный блок дополнительных ограничений, в котором отражается нижний предел на план сдачи государству продукции.

Определяющим при разработке оптимального плана сочетания отраслей в отдельном хозяйстве является план продажи государству продукции растениеводства и животноводства и объем капитальных вложений. Эти показатели доводятся хозяйству на несколько лет вперед.

Основными документами, из которых черпаются необходимые данные для составления экономико-математической модели по составлению оптимального плана являются годовые отчеты хозяйства за 3—5 последних лет, а для прогнозирования урожайности нужна информация не менее чем за 10 лет и технологические карты по возделыванию сельскохозяйственных культур и содержанию животных.

Прежде чем приступить к сбору и разработке информации, следует установить единицы измерения, в которых будут определяться объемы производства по каждой отрасли хозяйства. Обычно размеры растениеводческих отраслей определяются количеством гектаров площади, отводимой для данной отрасли и культуры; размер скотоводства — количеством структурных голов; свиноводства — количеством центнеров произведенной свинины; птицеводства — количеством голов взрослой птицы; коневодства — количеством поголовья рабочих лошадей; пчеловодства — количеством пчелосемей. Но объем производства продукции может оцениваться непосредственно в выходе продукции (центнерах, тоннах и т. д.). Однако это усложняет запись условий задачи, увеличивает ее размер, затрудняет сбор информации, поскольку необходимо продукцию подразделять на основную и сопряженную.

После этого необходимо установить единицы измерения по каждому ограничению. Например, площадь пашни — в га, затраты труда — в человеко-часах, затраты механизированного труда — в машино-сменах и т. д. В соответствии с принятыми единицами измерения по ограничениям рассчитываются объемы ресурсов, которые в матрице проставляются в крайнем правом столбце.

Размерность коэффициентов матрицы непосредственно зависит от единиц измерения, ограничений и переменных. Если, например, производство озимой пшеницы в задаче принято в центнерах, а затраты труда — в человеко-часах, то соответствующий норматив непосредственно показывает, сколько человеко-часов планируется израсходовать на производство одного центнера озимой пшеницы.

С точки зрения затрат труда, средств и времени на постановку, решение и анализ задачи сбор и обработка исходной информации и приведение ее к коэффициентам матрицы задачи — этапы наиболее трудоемкие и ответственные, поскольку от того, какая информация заложена в задаче, непосредственно зависят результаты ее решения и тем более практическое применение результатов расчета.

В качестве исходной информации для расчета коэффициентов матрицы задачи необходимо использовать технологические, стоимостные, биологические и другие показатели, рассчитанные применительно к конкретному хозяйству на определенную перспективу, исходя из научно обоснованных нормативов.

Сбор информации для расчета коэффициентов матрицы задачи может идти по нескольким каналам: на основе бухгалтерской и статистической отчетности, исходя из методических указаний по планированию сельского хозяйства Госплана СССР и Госплана союзной республики, методик, применяемых ЦСУ СССР и ЦСУ союзных республик (коэффициенты перевода различного вида работ в условную пахоту, отнесение затрат на сопряженную продукцию и т. п.), рекомендаций учреждений, специалистов и т. д.

Плановые нормативы для задачи следует рассчитывать, опираясь на фактические показатели, обработку их динамики с обязательным использованием методик Госплана СССР, Госплана союзной республики [1], нормативов, разрабатываемых отраслевыми НИИ, опытными станциями, сортоиспытательными участками, ориентируясь на усредненные темпы роста и прироста, показатели передовых хозяйств района, зоны, с учетом технологических карт и научного нормирования.

Закладываемая в задачу информация, каждый коэффициент матрицы должны быть тщательно проанализированы. Ошибка даже в одном показателе может существенно повлиять на результаты расчетов.

Кратко остановимся на некоторых моментах, связанных с обоснованием прогнозируемых на перспективу

---

[1] Например, Методических указаний по планированию сельского хозяйства РСФСР. Госплан РСФСР, «Экономика», М., 1973 г.

11 Заказ № 2009

нормативов, на примере обоснования уровня урожайности сельскохозяйственных культур (продуктивности животных).

Эта задача наиболее сложная, от ее правильного решения во многом зависит обоснование других показателей. Задача определения прогноза урожайности усложняется еще и тем, что экономисты не знают степень влияния на урожайность различных факторов, неизвестен и уровень, состояние определяющих урожайность факторов. Поэтому урожайность культур и продуктивность животных на перспективу приходится определять различными методами. Для того чтобы уровень этих показателей был более реальным, необходимо учитывать качество почв, различные дозы внесения удобрений, фактический уровень урожайности за последние годы, достижения передовых хозяйств, возможности повышения плодородия почвы, мелиорации земель, улучшение породности скота и др.

Прогнозирование урожайности и продуктивности животных можно осуществить, например, с помощью среднепрогрессивного уровня.

При прогнозировании урожайности следует определить выход конечной продукции с 1 га, то есть той части, которая реально доходит до государственного элеватора. При расчете выхода с 1 га товарного зерна из бункерного веса следует исключить отходы и семенной фонд, который определяется из расчета нормы высева на 1 га посева.

При обосновании урожайности (продуктивности) можно воспользоваться различными статистическими приемами обработки имеющейся информации. Так, можно воспользоваться, например, линейным трендом вида:

$$y_t = a + b\Delta t, \qquad (1)$$

где y_t — уровень урожайности (продуктивности) в t-ом году;

a, b — параметры линейного тренда;

$\Delta t = t - t_0$ — размерность лет по сравнению с базисным годом;

t_0 — базисный год.

Параметры линейного тренда находим методом наименьших квадратов, используя отчетные данные за последние 10 лет. Для отдаленной перспективы можно также использовать метод крайнего передового уровня или воспользоваться динамическими многофакторными функциями вида:

$$y_t = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad \text{(II)}$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значения факторов-аргументов, определяющих уровень урожайности (продуктивности). Применяются также и автокорреляционные модели вида:

$$y_t = f(y_{t-1}; y_{t-2}; \ldots; y_{(t-n)}) \qquad \text{(III)}$$

или

$$y_t = f(y_{t-k}; y_{t-2k}; \ldots; y_{t-pk}), \qquad \text{(IV)}$$

где t — год, на который определяется урожайность;
n — базисный год;
k — период ротации севооборота;
p — количество ротаций севооборота за период $t—n$.

Ниже мы остановимся на вопросах построения и использования моделей вида (I) — (IV). Здесь нам было важно подчеркнуть, что специальные математические или математико-статистические модели могут с успехом использоваться для обоснования прогнозно-плановых нормативов. Заметим при этом, что в подобных расчетах целесообразно величину нормативов определять различными методами с выведением усредненных прогнозных значений показателей.

При расчете же стоимостных, натуральных и прочих коэффициентов, увязанных с заложенной в модель урожайностью, необходимо использовать ту форму связи, которая проявляется с варьированием этих показателей и урожайности. Так, себестоимость центнера зерна связана с урожайностью геперболической зависимостью, и, имея фиксированную заранее урожайность, можно рассчитать соответствующую ей себестоимость. Аналогично следует исчислять коэффициенты по затратам труда, техники и т. д.

В то же время имеется ряд показателей, которые не изменяются в зависимости от изменения урожайности. Так, содержание кормовых единиц в центнере, например, пшеницы не зависит от ее урожайности, а зависит от качества зерна и при прочих равных условиях является постоянным. Расчет коэффициентов затрат требует от составителей задачи глубоких технологических, агробиологических и других знаний. Особую трудность при этом представляет расчет той части затрат основных фондов, которая должна быть перенесена на стоимость конечной продукции, то есть амортизации. Известно, что такие виды основных фондов, как здания, сооружения, машины, оборудование, переносят свою стоимость по частям, причем по годам эти части распределяются далеко не всегда равномерно, да и запланированный срок службы фондов не всегда объективно обусловлен. В этом случае встает задача по возможности точно отразить ту часть амортизационных отчислений, которая падает на конкретную продукцию в конце планового периода, то есть на тот период, на который определяется оптимальная структура производства. Здесь можно воспользоваться данными титульных списков строительства, установленных нормативных сроков окупаемости и т. п. В подобных расчетах шире следует использовать экспертные оценки специалистов, учитывать тенденции в изменении структуры и величины калькуляции затрат по конкретным продуктам.

Аналогичная картина может наблюдаться и в отношении расчета той части оборотных фондов, которая переносится на основную продукцию. Так, при расчете затрат на производство зерна необходимо учесть в калькуляции себестоимости этой продукции затраты минеральных удобрений, вносимых под эту культуру. Известно, что вносимые минеральные удобрения не сразу отдают все питательные вещества, часть их продолжает влиять на урожай последующих лет. Таким образом, нельзя полностью относить затраты, связанные с внесением минеральных удобрений, на соответствующую продукцию одного года, поскольку это завышает себестоимость. Поэтому здесь следует использовать определенные пропорции, которые соответствуют местным условиям. Например, в год, на который рассчитывается план, на соответствующую продукцию переносится 50—60% стоимости внесенных минеральных удобрений, в последующий год — 30—35%, а в третий — остальная часть.

В некоторых случаях в подобных работах целесообразно использовать нормативы, применяемые опытными или селекционными станциями, зоотехническими пунктами, учхозами, передовыми хозяйствами, фермами, бригадами и т. п. Разумеется, необходимо, чтобы эти нормативы были скорректированы и приведены в соответствие с учетом специфики хозяйства.

Некоторые нормативы, например цены реализации, целесообразно брать на уровне последнего отчетного года, однако и их надо корректировать с учетом тенденции изменения качества сдаваемого продукта. Важно, чтобы нормативы были напряженными, но реально выполнимыми.

§ 3. Простейшая структурная модель задачи

Для построения наиболее простой модели задачи примем следующую систему обозначений:

i — индекс видов производственных ресурсов ($i=1, 2, \ldots, m$);

j — индекс видов продукции или число отраслей — способ производства ($j=1, 2, \ldots, n$);

x_j — объем производства продукции j-ого вида или объем производства продукции j-ой отрасли;

a_{ij} — норма затрат i-ого вида ресурсов на единицу j-вой продукции;

A_i — объем ресурсов i-ого вида;

b_{ij} — содержание i-ого ресурса в единице j-ой продукции (например, содержание кормовых единиц в центнере овса, ячменя, сена, соломы и т. п.);

$a_{i\min}$ — минимально допустимая величина производства некоторого или нескольких однородных продуктов;

$a_{i\max}$ — максимально возможная величина производства некоторого или нескольких однородных продуктов;

c_j — оценка экономической эффективности производства единицы j-ой продукции (цена реализации, прибыльность, себестоимость и т. п.);

k_{ij} — коэффициент связи производства двух продуктов (например, основной и сопряженной продукции).

В соответствии с введенными обозначениями упрощенная структурная модель задачи запишется так:

$$\text{найти } L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max \ (\min)$$

при условии:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant A_i \quad (i=1, 2, \ldots, \kappa).$$

Это условие показывает, что затраты ресурсов i-вого вида на производство всей продукции не должны превышать имеющегося объема ресурсов.

$$2)\ \sum_{j=1}^{l} b_{ij}x_j - \sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0 \quad (i=\kappa+1, \ldots, \kappa'),$$

где l — число отраслей растениеводства;
$(n—l)$ — число отраслей животноводства.

Второе условие характеризует ограничение по кормам, подстилке и т. п. Оно показывает, что объем кормовых ресурсов, получаемых от растениеводческих отраслей (покупные корма и переходящие запасы кормов пока для упрощения в расчет не принимаются), должен обеспечивать потребность в них животноводческих отраслей.

$$3)\ \sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j - \sum_{j=l+1}^{n} b_{ij}x_j \leqslant 0 \quad (i=\kappa'+1, \ldots, \kappa'').$$

Третье условие характеризует другой вид связи между отраслями растениеводства и животноводства, а именно — количество внесенных органических удобрений не должно превышать их выхода.

$$4)\ k_{ij}x_j - x_j^* \begin{Bmatrix} \geqslant \\ = \\ \leqslant \end{Bmatrix} 0 (i=\kappa''+1, \ldots, \kappa''').$$

$$j^* \neq j, \text{ но } j^* \in j = \{1, \ldots, n\}.$$

Четвертое условие характеризует связь между выходом основной (j) и сопряженной (j^*) продукции. В зависимости от конкретного случая в этом условии остается один из трех знаков.

$$5)\ a_{i\min} \leqslant x_j \leqslant a_{i\max} \quad (i=\kappa'''+1, \ldots, m).$$

Пятое условие показывает, что на производство любого продукта (группы продуктов) могут быть наложены двухсторонние ограничения, то есть производство j-ой продукции должно быть не ниже минимально допустимой величины ($a_{i\min}$) и не более максимальной возможности ($a_{i\max}$).

$$6)\ x_j \geqslant 0.$$

Последнее ограничение показывает, что производство любого продукта не может быть отрицательной величиной.

Величина L в зависимости от того, какой именно критерий выбран, может означать, например, общую величину прибыли, приведенной прибыли, объема валовой или товарной продукции. В этом случае критерий стремится к максимуму, то есть имеет вид:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max.$$

Если же критерий оптимальности характеризует, например, минимальные издержки на производство всей продукции, то L показывает величину этих затрат, которая стремится к минимуму, и в этом случае критерий запишется так:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min.$$

Первое условие модели одно из наиболее общих и простых. Оно может характеризовать ограничение на использование земельных угодий вообще и по видам, ограничение по затратам труда, техники, материально-денежных средств и т. п. Поскольку таких ограничений в задаче может быть несколько (два, пять, десять и т. п.), то справа от записи условий в модели проставляется изменение порядкового номера такого типа ограничений — от первого до k-го.

В зависимости от экономического смысла условие первое может конкретизироваться и записываться в несколько иной форме. Так, если в задаче наряду с производством животноводческой продукции требуется определить наилучшую структуру посевов зерновых, технических и кормовых культур, то в качестве неизвестных величин (x_j) принимается площадь посева j-ых культур, то есть в пределах от первой до l-ой неизвестной величины в задаче будет проставлено множество переменных, характеризующих искомые площади посева сельскохозяйственных культур.

В этом случае ограничение на общую площадь посева, например, при условии, что повторных и пожнивных посевов в хозяйстве нет, запишется так:

$$\sum_{j=1}^{l} x_j \leqslant S_i,$$

где S — общая посевная площадь, а $i=1$.
Это же условие можно записать и по-другому:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant S_i.$$

В такой записи предполагается, что под отрасли животноводства непосредственно посевные площади не используются, то есть коэффициенты при всех x_j (от $l+1$ до n) равны нулю. В развернутом виде это запишется так:

$$x_1+x_2+\ldots+x_l+0x_{l+1}0x_{l+2}+0x_{l+3}+\ldots+0x_n \leqslant S_i.$$

Если же искомое производство растениеводческой продукции представлено в задаче в центнерах, например, x_1 — количество озимой пшеницы (ц), x_2 — количество озимой ржи (ц) и т. п., то в ограничение на посевную площадь необходимо ввести коэффициент, который бы показывал, сколько пашни (га) потребуется для производства центнера продукции конкретной культуры — коэффициент обратной урожайности. В экономико-математической модели это можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_{ij} x_j \leqslant S_i \text{ или } \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j \leqslant S_i, \qquad (i=1),$$

где λ_{ij} — коэффициент обратной урожайности j-ой культуры.

Если требуется в некоторой, скажем, i-ой строке отразить ограничения по затратам живого труда в конкретный период, например в сентябре, то по форме такая запись будет совпадать с первым условием в структурной модели.

Обозначим через t_{ij} — нормативы затрат живого труда (человеко-час) на единицу j-ой продукции, а через T_i — общие ресурсы труда, например, в сентябре месяце. Тогда это условие можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \leqslant T_i.$$

Второе условие — математическая запись баланса кормов — также может быть конкретизировано и видоизменено. Представим себе, что хозяйство полностью специализируется на производстве продукции животноводства. Тогда естественно считать, что корма собственного производства не производятся, но зато имеется набор покупных кормов. В этом случае первая часть условия $\left(\sum_{j=1}^{l} b_{ij}x_j\right)$ может показывать наличие i-ых питательных веществ в объеме покупных кормов. При этом в результате оптимального плана находится множество величин x_j, изменяющихся от первого до l-ого номера (l величин x_j), которые показывают, сколько и каких кормов следует покупать хозяйству при оптимальной структуре производства.

Если же в хозяйстве производятся собственные корма и часть кормов приобретается со стороны, то это можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{l} b_{ij}x_j + \sum_{j=n+1}^{r} b_{ij}x_j \geqslant \sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}x_j.$$

где $(r—n)$ — количество видов покупных кормов.

Для того чтобы не усложнять запись, можно воспользоваться следующим приемом. Обозначим любым индексом, пусть, например, индексом k, общее количество возможных видов кормов собственного производства и покупных кормов. Набор этих кормов, их порядковые номера обозначим так: $j=1, 2, \ldots, k$. Тогда второе условие в модели можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{\kappa} b_{ij}x_j - \sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0.$$

При любой записи баланс кормов в матрице дифференцируется по видам корма, питательных веществ и подкормок: кормовые единицы, переваримый протеин, калий, фосфор и т. п. Иными словами, баланс кормов может быть представлен двумя, тремя, пятью и более ограничениями. Именно поэтому в структурную форму записи модели вводится индекс i, который показывает возможную дифференциацию ресурсов, в том числе и баланса кормов. Поэтому справа во втором условии модели проставляется как бы дополнительная расшифровка: $(i=\kappa+1,\ldots,\kappa')$, тем самым показывается, что в балансе кормов может быть несколько $(k'-k)$ ограничений, например, с 6-го по 12-е или с 8-го по 20-е и т. п.

Третье условие модели по форме напоминает второе, с той лишь разницей, что здесь наблюдается обратная картина. В этом условии балансовое сальдо между растениеводством и животноводством в пользу животноводства, то есть внесение органических удобрений (без учета органических удобрений типа торф, фекалии, зола, зеленые удобрения и т. п.) в сумме не может быть больше его получения от животноводческих отраслей. Если же необходимо отразить то положение, что наряду с органическими удобрениями животного происхождения используется торф, зола и т. п., то смысл условия при этом не меняется, поскольку общее количество вносимых органических удобрений и в данном случае не может превышать его количества.

Смысл четвертого условия заключается в том, что производство одного продукта часто функционально или почти функционально связано с производством другого продукта. Например, известно, что при производстве центнера озимой пшеницы выход соломы составляет примерно 0,8 ц. Поэтому если в нашей задаче, скажем, x_4 — производство озимой пшеницы (ц), а x_5 — выход соломы озимой пшеницы (ц), то очевидно, что условие следует записать так: $0{,}8x_4-x_5=0$. В этом случае коэффициент 0,8 и является коэффициентом k_{ij}, который имеется в четвертом условии модели. Аналогичные связи проявляются и в животноводстве, например, производство баранины и шерсти, привес скота и его продуктивность и т. п. Причем данное условие может отражать и чисто зоотехнические взаимосвязи, такие, как соотношения в структуре стада — взаимосвязь между маточным поголовьем скота и приплодом, количеством телочек и бычков в структуре стада крупного рогатого скота и т. п.

Подобные ограничения в экономико-математической литературе часто именуются «ограничения—связки», «ограничения по связкам», «условия связки» и т. п. Более точно ограничения этого типа следует называть условиями по связи между видами производства или просто «ограничения по связи».

Пятое условие в модели вводится в том случае, когда необходимо, чтобы в оптимальный план обязательно было включено производство какого-то продукта. Это может вызываться различными обстоятельствами. Например, площадь пашни под какой-либо культурой должна составлять, скажем, не менее 200 га, но и не более 400 га. Или, если, например, хозяйству невыгодно производить молоко, но планом сдачи оно предусмотрено. В этом случае на данный продукт накладывается ограничение: $x_j \geqslant a_{i\min}$. Или другой пример. Часто оказывается, что некоторый продукт для хозяйства является чрезмерно рентабельным. В таком случае при решении задачи может получиться так, что хозяйство должно в основном производить только его. Прибыль действительно в этом случае может быть наивысшей. Однако, во-первых, государству нужны и другие продукты, во-вторых, возникают проблемы хранения этого продукта, его реализации, в-третьих, возникают проблемы сезонности производства и т. п. Значит, производство данного продукта необходимо ограничить сверху, то есть наложить на него ограничение вида: $x_j \leqslant a_{i\max}$. Такой тип ограничений приходится часто накладывать и на поголовье скота, поскольку рост поголовья скота ограничен наличием животноводческих построек, кормовой базой и т. п. В практических задачах такой тип ограничений необходимо накладывать на ряд растениеводческих и животноводческих продуктов. Пусть, например, необходимо, чтобы площадь посева под морковью (обозначим ее через x_{10}) в структуре посевных площадей при оптимальном плане занимала не менее 20 га, но и не более 60 га, то есть находилась где-то между этими пределами. Тогда данное условие в экономико-математической модели запишется так: $x_{10} \geqslant 20$ и $x_{10} \leqslant 60$, или $20 \leqslant x_{10} \leqslant 60$.

Последнее (шестое) условие комментировать не приходится, поскольку очевидно, что отрицательных видов производств не существует, а значит, и любой x в нашей задаче должен быть $\geqslant 0$.

§ 4. Обоснование критерия оптимальности задачи

Расчет оптимальной специализации и структуры производства сельскохозяйственного предприятия предполагает строгое обоснование и описание его цели. От того, насколько обоснована цель задачи, непосредственно зависит структура производства, его эффективность и практическая значимость.

Эмпирически можно убедиться, что оптимальные планы, рассчитанные по различным критериям, сильно разнятся между собой. Структура производства при этом может оказаться весьма различной. Поэтому необходимо научное обоснование критерия оптимальности задачи.

Прежде всего надо, чтобы критерий оптимальности имел четкую экономическую интерпретацию и соответствовал принципу повышения эффективности производства. В критерии должны быть учтены те цели, которые ставит перед собой предприятие. Цели эти могут быть различными, они зависят от уровня развития сельхозпредприятия, от того, какими потенциальными возможностями оно обладает, что является для него наиболее важным в данных условиях и т. п. При этом надо учитывать и те конкретные задания, которые спускаются хозяйству плановыми органами.

Известно, что материальные интересы конкретного производителя и отдельного хозяйства не всегда совпадают с интересами всего общества, между ними могут быть определенные неантагонистические противоречия. Критерий оптимальности должен способствовать их правильному учету и разрешению. Рассмотрим важнейшие критерии оптимальности, которые применяются или могут быть применены в задачах такого рода:

а) максимум валовой или товарной продукции;

б) максимум валовой или товарной продукции, отнесенный на 100 га земель, одного работника и т. п.;

в) минимум суммарных трудовых затрат на запланированную структуру и объем продукции;

г) минимум суммарных производственных затрат в денежном выражении;

д) минимум приведенных затрат;

е) максимум прибыли или приведенной прибыли;

ж) максимальный уровень рентабельности, исчисленной как отношение общей массы прибыли к суммарным производственным (коммерческим) затратам или как отношение общей массы прибыли к сумме основных и оборотных фондов.

Максимум валовой или товарной продукции хотя и важные для анализа показатели, однако как критерии оптимальности они не лишены ряда существенных недостатков.

Прежде всего при применении этих критериев эффективность производства невольно отодвигается на второй план, поскольку при этом не учитывается соотношение затрат на производство и конечных результатов. В структуру производства при этих критериях войдут прежде всего те продукты, которые имеют наибольшую стоимостную оценку, тем самым на первый план выдвигаются стоимостные показатели, объем производства. Кроме того, если ориентироваться на максимум валовой продукции, то в оптимальный план будет входить в большом количестве различного рода сопряженная, побочная и промежуточная продукция в ущерб конечной.

По существу, этими же недостатками обладают и критерии максимума валовой или товарной продукции, отнесенной к той или иной величине. Правда, в этом случае появляются некоторые положительные моменты, стимулирующие в оптимальном плане или рост производительности живого труда, или стремление наиболее эффективно использовать земельные угодья. Однако следует иметь в виду, что критерии такого рода имеют дробно-линейную форму, а это в значительной степени усложняет расчеты, так как при этом возникает уже задача нелинейного программирования, и обычный симплекс-метод здесь неприемлем.

Минимизирующие критерии мало пригодны при решении задач по расчету оптимальной специализации и структуры производства, поскольку их применение предполагает определение объемов производства продуктов и их номенклатуры заранее, до решения задачи. А это-то как раз является основным для таких задач. Применение минимизирующих критериев способствует лишь снижению затрат на производство, но не стимулирует рост производства. Если же заранее не установить нижние пределы на продукцию, то минимальные затраты будут тогда, когда производства вообще не будет, то есть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$.

Критерий максимум прибыли лучше отражает существо дела. В этом критерии в основном отражены и учтены те требования, которым должен соответствовать критерий оптимальности подобного класса задач. Здесь и стимулирование роста производства и снижение затрат на него, стимулирование выхода конечной продукции и роста производительности труда, заинтересованность работника, коллектива и общества в повышении эффективности производства.

С точки зрения обоснованного и объективного расчета оптимального плана по этому критерию, как впрочем и по другим, необходимо знать чистую себестоимость конкретного продукта, без общехозяйственных расходов. В этом случае в оптимальный план входят прежде всего те продукты, которые дают наибольшую абсолютную величину прибыли. Отвечает ли это целям хозяйственной деятельности совхозов и колхозов? Да, но не совсем. Дело в том, что при прочих равных условиях хозяйства заинтересованы в производстве тех продуктов, которые при равном вложении средств дают наибольшую абсолютную прибыль. Таким образом, речь идет о прямой оценке эффективности производства — о соизмерении результатов с затратами по показателям: уровень рентабельности и общая норма прибыли.

В случае решения задачи по критерию максимума прибыли в оптимальный план прежде всего входят те виды производств, единица продукции которых дает наибольшее абсолютное ее приращение. Правда, это происходит не всегда, ибо могут сказаться остальные ограничения и коэффициенты задачи. Однако коэффициенты эффективности, как правило, существенно влияют на структуру рассчитываемого оптимального плана, куда преимущественно входят продукты, которые дают наибольшую прибыль.

Максимальный уровень рентабельности. Этот показатель непосредственно характеризует эффективность производства. Применительно к сельскому хозяйству он рассчитывается как отношение полученной массы прибыли к суммарным производственным или коммерческим затратам.

При решении задач по этому критерию в оптимальный план преимущественно войдут те отрасли и продукты, которые наиболее рентабельны в данных условиях. И в этом случае происходит непосредственное сравнение затрат с результатами производства. Положительная сторона этого критерия заключается в том, что он содержит в себе как бы два критерия: стремление к максимуму прибыли и стремление к минимуму затрат. Данный критерий соответствует общепризнанной цели рационального хозяйствования — достижению максимума эффекта при минимуме затрат.

Однако его применение в задачах линейного программирования затруднено, поскольку он имеет не линейную, а дробно-линейную форму:

$$L = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} c_j' x_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j' x_j},$$

где L — уровень рентабельности (%);

c_j — цена реализации единицы j-ой продукции (руб.);

c' — себестоимость (производственная или коммерческая) единицы j-ой продукции (руб.);

x_j — искомый объем производства продукции j-ого вида.

Использование данного показателя в качестве критерия оптимальности предполагает применение несколько отличного от обычного симплексного метода алгоритма нахождения оптимального варианта. Поэтому такие показатели, как максимальный уровень рентабельности, максимальная производительность труда, максимальная фондоотдача и т. п., можно использовать в качестве критериев оптимальности лишь при наличии специальной программы для ЭВМ, которой в настоящее время большинство вычислительных центров еще не располагает.

Поэтому для расчета наиболее обоснованной структуры производства на плановый период необходимо определить такой показатель, который бы по возможности наилучшим образом соответствовал относительным показателям. Таким показателем является максимальная приведенная прибыль. Особенностью этого критерия является отражение в нем удельных капитальных вложений, связанных с необходимостью реализации рассчитанного оптимального плана.

Этот показатель, как и уровень рентабельности, концентрирует в себе, по сути дела, два критерия: стремление к максимуму прибыли и к минимуму текущих и удельных капитальных затрат. Показатель приведенной прибыли имеет вид:

$$П=Р-(С+ЕК),$$

где П — приведенная прибыль;
Р — валовая выручка;
С — текущие затраты;
Е — нормативный коэффициент экономической эффективности;
К — капитальные затраты.

Содержание этого показателя отвечает целям расчетливого ведения хозяйства — получению максимально возможной прибыли при минимально возможных издержках производства и целям общества — получению максимума продукции при минимально возможных вложениях. Этот показатель в настоящее время особенно широко используется на районном, областном, зональном уровнях планирования.

Однако в этом случае показатель приведенной прибыли несколько модифицируется, в него входит еще одна компонента, характеризующая транспортные расходы, связанные с внутренними (областными и т. п.) перевозками. Показатель приведенной прибыли принимает следующий вид:

$$П=Р-(С+ЕК+Т),$$

где Т — суммарные транспортные расходы, связанные с производством и реализацией продукции.

Таким образом, в задачах такого рода в настоящее время следует использовать два наиболее предпочтительных критерия: максимальную прибыль или максимальную приведенную прибыль.

§ 5. Построение матрицы задачи

Построение матрицы экономико-математической задачи — важный этап расчета оптимального плана сочетания отраслей. Оформление матрицы — процесс творческий. Его нельзя формализовать, как нельзя допустить, чтобы все задания строились по одному заранее заданному и не поддающемуся ни критике, ни совершенствованию проекту. Каждая конкретная задача может иметь свою матрицу (и не одну), каждый специалист вправе так конструировать матрицу, как считает наиболее правильным, отвечающим специфике объекта, цели задачи и общим требованиям ее построения. Поэтому здесь мы остановимся лишь на общих принципах и требованиях к построению матрицы данной задачи, ограничившись лишь ее принципиальной схемой.

Построение матрицы задачи начинается с установления перечня неизвестных и системы ограничений. В зависимости от размеров задачи переменные и ограничения могут представляться либо достаточно подробно, либо в агрегированном виде — лишь наиболее важные из них. Например, если при больших размерах задачи зерновые культуры могут быть представлены каждой культурой конкретно, то при небольших ее размерах зерновые могут быть представлены в целом, то есть одной неизвестной.

Формирование строк матрицы начинается с основных ограничений. К ним относятся ограничения по наличию и использованию земельных угодий: пашня, сенокосы, пастбища; использование живого труда всего и по периодам; использование техники, средств химизации, кормовых ресурсов, производственных построек и т. д.

В дополнительные ограничения, которые записываются после основных, входят ограничения по связи между переменными, ограничения по объему производства продукции и т. п.

В последней строке матрицы задачи записываются оценки целевой функции.

Упрощенная схема матрицы такой задачи приведена в таблице 8.1.

§ 6. Упрощенная модель задачи определения оптимальной структуры и размещения производства в хозяйстве

В практической деятельности важно не только установить оптимальную структуру производства продукции, но и так разместить его по отделениям (фермам, бригадам), чтобы можно было от этого получить наивысшую эффективность. Такая задача также может быть решена с помощью методов экономико-математического

Таблица 8.1

Упрощенная общая схема матрицы задачи для расчета оптимального сочетания отраслей в хозяйстве

№ п/п	Основные, дополнительные ограничения и целевая функция задачи	Ед. изм.	Переменные величины						
			продукция растениеводства (га)					покупные корма (ц)	
			озимая пшеница (x_1)	озимая рожь, га (x_2)	овес (x_3)	. . .	многолетние травы на сено ($x_к$)	жом ($x_{к+1}$)	барда ($x_{к+2}$)
1	Площадь пашни	га	a_{11}	a_{12}	a_{13}	. . .	$a_{1к}$		
2	Затраты живого труда	чел.-дн.	a_{21}	a_{22}	a_{23}	. . .	$a_{2к}$	$a_{2к+1}$	$a_{2к+2}$
3	Затраты живого труда в напряженный период	»	a_{31}	a_{32}	a_{33}	. . .	$a_{3к}$	$a_{3к+1}$	$a_{3к+2}$
. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$к$	Кормовые единицы	ц корм. ед.	$в_{к1}$	$в_{к2}$	$в_{к3}$	. . .	$в_{кк}$	$в_{кк+1}$	$в_{кк+2}$
$к+1$	Переваримый протеин	ц	$в_{к+11}$	$в_{к+12}$	$в_{к+13}$	. . .	$в_{к+1к}$	$в_{к+1\,к+1}$	$в_{к+1к+2}$
. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$к'$	Органические удобрения	ц	$a_{к'1}$	$a_{к'2}$	$a_{к'3}$	. . .	$a_{к'к}$		
$к'+1$	Связь между привесом КРС и производством молока	ц/ц							
$к'+2$	Коровники	скотомест							
$к'+3$	Птичники	голов							
. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m	Производство шерсти	ц							
$m+1$	Валовая продукция	руб.	c_1	c_2	c_3	. . .	$c_к$	0	0

Продолжение

№ п/п	Основные, дополнительные ограничения и целевая функция задачи	Переменные величины								Объемы ресурсов и типы ограничений
		покупные корма (ц)		продукция животноводства						
		. . .	мел (x_l)	молоко (x_{l+1})	привес КРС (x_{l+2})	яйцо (тыс. шт.) (x_{l+3})	. . .	. . .	шерсть (x_n)	
1	Площадь пашни									$\leqslant A_1$
2	Затраты живого труда	. . .	a_{2l}	a_{2l+1}	a_{2l+2}	a_{2l+3}	. . .	. . .	a_{2n}	$\leqslant A_2$
3	Затраты живого труда в напряженный период	. . .	a_{3l}	a_{3l+1}	a_{3l+2}	a_{3l+3}	. . .	. . .	a_{3n}	$\leqslant A_3$
. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
κ	Кормовые единицы	. . .	. . .	$-a_{\kappa l+1}$	$-a_{\kappa l+2}$	$-a_{\kappa l+3}$	. . .	. . .	$-a_{\kappa n}$	$\geqslant 0$
$\kappa+1$	Переваримый протеин	. . .	. . .	$-a_{\kappa+1l+1}$	$-a_{\kappa+1l+2}$	$-a_{\kappa+1l+3}$	. . .	. . .	$-a_{\kappa+1n}$	$\geqslant 0$
. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
κ'	Органические удобрения			$-в_{\kappa' l+1}$	$-в_{\kappa' l+2}$	$в_{\kappa' l+3}$	. . .	. . .	$-в_{\kappa' n}$	$\leqslant 0$
$\kappa'+1$	Связь между привесом КРС и производством молока			$\kappa_{\kappa'+1l+1}$	-1					$=0$
$\kappa'+2$	Коровники			$a_{\kappa'+2l+1}$	$a_{\kappa'+2l+2}$	$a_{\kappa'+3l+3}$	. . .	. . .		$\leqslant A_{\kappa'+2}$
$\kappa'+3$	Птичники									$\leqslant A_{\kappa'+3}$
. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
m	Производство шерсти	. . .							1	$\geqslant a_{\min}$
$m+1$	Валовая продукция	0	0	c_{l+1}	c_{l+2}	c_{l+3}	. . .	. . .	c_n	$\to \max$

моделирования. Таким образом, в рамках одной задачи имеется возможность одновременного решения казалось бы двух самостоятельных задач — оптимизация структуры производства и оптимизация его размещения.

В самой упрощенной постановке задача формулируется так: определить, что и где надо производить в хозяйстве, чтобы наилучшим образом была учтена специфика хозяйства, задачи государства в области производства сельскохозяйственной продукции, наилучшим образом использовалась земля, труд, материально-денежные и другие средства, а хозяйство при этом получило бы наивысший экономический эффект, находящий свое выражение в конкретном критерии оптимальности.

Экономико-математическая модель такой задачи более сложная по сравнению с ранее сформулированной, поскольку задача в значительной степени усложнена.

Для записи структурной экономико-математической модели задачи примем следующую систему обозначений:

i — индекс видов производственных ресурсов ($i=1, 2, \ldots, m$);

j — индекс видов продукции ($j=1, 2, \ldots, n$);

k — индекс отделения (фермы) ($k=1, 2, \ldots, K$);

x_{jk} — объем производства продукции j-ого вида в k-ом отделении;

a_{ijk} — норма затрат ресурсов i-ого вида на единицу j-ой продукции в k-ом отделении;

A_{ik} — объем ресурсов i-ого вида в k-ом отделении;

A_i — общий объем ресурсов i-ого вида в хозяйстве;

b_{ijk} — содержание i-ого ресурса в единице j-ой продукции, в k-ом отделении;

$a_{k\min}$ — минимально допустимая величина производства конкретной продукции в k-ом отделении;

$a_{k\max}$ — максимально возможная величина производства конкретной продукции в k-ом отделении;

$A_{\min}$ и $A_{\max}$ — соответственно минимально допустимая и максимально возможная величина производства некоторой продукции в целом по хозяйству;

k_{ijk} — коэффициент связи некоторых видов производств в k-ом отделении;

C_{jk} — оценка критерия оптимальности (например, прибыль от единицы j-ой продукции в k-ом отделении).

В соответствии с принятыми обозначениями структурная модель задачи запишется так:

найти $L=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{K} C_{jk}x_{jk} \to \max$

при условии:

$$1)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{jk} \leqslant A_{ik}\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ i')$$

(затраты ресурсов i-ого вида в k-ом отделении на производство в нем всех j-ых продуктов не должны превышать в отделении ресурса этого вида).

$$2)\quad \sum_{j=1}^{l} b_{ijk}x_{jk} - \sum_{j=l+1}^{n} a_{ijk}x_{jk} \geqslant 0\quad (i=i'+1,\ \ldots,\ i'')$$

(объем i-ых ресурсов, получаемых от l отраслей растениеводства, в k-ом отделении должен быть не менее расхода этих ресурсов в отраслях животноводства в данном отделении. При необходимости в этом условии учитываются переходящие запасы, возможность приобретения ресурсов со стороны, в том числе и использование ресурсов других отделений).

$$3)\quad \sum_{j=1}^{l} a_{ijk}x_{jk} - \sum_{j=l+1}^{n} b_{ijk}x_{jk} \leqslant 0\quad (i=i''+1,\ \ldots,\ i''')$$

(внесение органических удобрений в k-ом отделении под продукцию земледелия не должно превышать их выхода в этом отделении. Предполагается, что возможность транспортировки органических удобрений от других отделений нерациональна. При необходимости, однако, это можно учесть, но модель в этом случае усложняется).

$$4)\quad k_{ijk}x_{jk} - x_{j'k} \left\{\begin{matrix}\geqslant\\=\\\leqslant\end{matrix}\right. 0\quad (i=i'''+1,\ \ldots,\ i'''')$$

причем $j \neq j'$; но $j' \in j=\{1,\ \ldots,\ n\}$.

(выход в k-ом отделении основной (j) и сопряженной или побочной (j') продукции может быть связан посредством коэффициента k_{ijk}).

$$5)\ a_{k\min} \leqslant x_{jk} \leqslant a_{k\max}\ (i=i''''+1,\ \ldots,\ i''''')$$

(на производство j-ой продукции в k-ом отделении могут накладываться двухсторонние ограничения: не менее минимально допустимой величины ($a_{k\min}$) и не более максимально возможной величины ($a_{k\max}$), которые устанавливаются заранее).

$$6)\ A_{\min} \leqslant \sum_{\kappa=1}^{K} x_{jk} \leqslant A_{\max}\ (i=i'''''+1,\ \ldots,\ m)$$

(на производство j-ой продукции в целом по хозяйству также могут быть наложены двухсторонние ограничения).

$$7)\ x_{jk} \geqslant 0.$$

(условие неотрицательности искомой переменной).

В отличие от приведенной ранее матрица данной задачи имеет несколько иную, так называемую блочную форму. Каждый блок этой матрицы предназначен для отражения условий производства по конкретному отделению: I блок — для первого отделения, II — для второго отделения и т. д. При этом каждый блок вполне автономен и представляет собой как бы отдельную хозяйственную ячейку, не зависящую от других. Поэтому в матрице задачи блоки расположены по диагонали (с верхнего левого угла к правому нижнему) и не связаны друг с другом. Каждому блоку присущи свои переменные, виды и характер ограничений, свои нормативные коэффициенты.

Однако поскольку каждое отделение есть составная часть хозяйства, то объединение блоков осуществляется посредством так называемой связывающей подматрицы, в которой отражаются ограничения на уровне хозяйства.

Так, в нашей модели в связывающей подматрице будут отражены ограничения шестого вида по производству продукции в целом по хозяйству. Связь между отделениями (блоками) осуществляется также и через оценки критерия оптимальности.

В заштрихованных прямоугольниках таблицы 8.2 проставляются коэффициенты a_{ijk}, b_{ijk}, k_{ijk} и т. д., то есть те нормативы, которые отражают специфические условия производства продукции в каждом из k (в данном случае из трех) отделений. В связывающей подматрице проставляются те коэффициенты, которые позволяют объединить так называемые автономные (локальные) ограничения (по отделениям) в целом по хозяйству.

Таблица 8.2

Принципиальная схема блочной матрицы задачи по определению оптимальной структуры и размещения производства в хозяйстве

№ п/п	Ограничения и целевая функция	Ед. изм.	Переменные												Объемы ресурсов и типы ограничений
			I отделение				II отделение				III отделение				
			x_{11}	x_{21}	…	x_{n1}	x_{12}	x_{22}	…	x_{n2}	x_{13}	x_{23}	…	x_{n3}	
	Ограничения для первого отделения	…													
	Ограничения для второго отделения	…													
	Ограничения для третьего отделения	…													
m	Связывающая подматрица	…													
$m+1$	Целевая функция	…	c_{11}	c_{21}	…	c_{n1}	c_{12}	c_{22}	…	c_{n2}	c_{13}	c_{23}	…	c_{n3}	$\to max$

Решение такой задачи, как и первой, осуществляется симплексным методом.

§ 7. Краткие выводы, методические советы и задания

Практическое решение задачи по расчету оптимальной структуры производства в хозяйстве имеет весьма большое значение, и, как показали многочисленные опыты, оптимальный вариант структуры производства, по самым скромным данным, в среднем позволяет на 12—15% повысить эффективность производства. Эти модели на первый взгляд могут показаться довольно сложными. Поэтому при изучении данного вопроса целесообразно самостоятельно составить несколько, пусть весьма упрощенных, моделей, постепенно переходя от небольших матриц к более полным.

Особенно важно научиться правильно ставить задачу, видеть, на какой конкретно период следует ее рассчитывать. Главное внимание следует уделить обоснованию нормативов и критерию оптимальности, поскольку от этого непосредственно зависит приемлемость оптимальной структуры.

При обосновании критерия оптимальности следует исходить из тех требований, которые к нему предъявляются, видеть математическую форму критерия, выделяя линейные и дробно-линейные. При построении матрицы задачи целесообразно заранее выписать все возможные неизвестные и ограничения, сориентироваться в ее размере, проанализировать, какие ограничения и переменные наиболее важны, какие из них можно сгруппировать (объединить), какими можно пренебречь. Необходимо строго следить за типом ограничений. Все переменные целесообразно разбить на группы, например, продукция растениеводства, животноводства, прочая, покупные корма и т. д. То же целесообразно сделать и с ограничениями.

При решении практических задач необходимо следить за ограничениями (типа «не менее») на производство отдельных продуктов или их групп (по зерновым, овощам, молоку и т. д.). Если в матрице основная и сопряженная продукция представлена двумя самостоятельными векторами, то их необходимо связать посредством соответствующих уравнений связи. Следует самым внимательным образом подойти к уяснению идеи и принципов построения матрицы задачи оптимизации структуры при одновременной оптимизации размещения производства. Такие задачи особенно важны при переходе от нижних уровней планирования (на уровне хозяйства) к верхним (район, область, республика и т. д.). В задачах более высокого уровня используются преимущественно матрицы блочного характера, но в них уже в качестве блоков могут выступать (в зависимости от конкретной задачи) хозяйства, районы, области и т. п. При этом внутри блоков могут быть свои подблоки. Так, если поставлена задача оптимизировать структуру и размещение производства в области, в которой имеется пять районов и в каждом районе, предположим, имеется по три хозяйства, то матрица задачи в этом случае будет иметь пять блоков, а внутри каждого блока будет еще по три подблока.

Таблица 8.3

Схемы матрицы задачи для расчета оптимального сочетания отраслей в колхозе им. Шевченко Новгородковского района Кировоградской области

№ п/п	Ограничения	Ед. изм.	Озимая пшеница товарная (га)	Озимая пшеница в обмен (га)	Ячмень фуражный (га)	Овес фуражный (га)	Гречиха товарная (га)	Горох фуражный (га)	Кукуруза (зерно) фуражная (га)	Подсолнечник (га)
	$i=1, 2, \ldots, 52$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	Пашня	га	1	1	1	1	1	1	1	1
2	Конно-ручной труд	чел.-дн.	2,95	5,95	3	3	3,5	3	5,51	4,05
3	В том числе в мае	»	0,51	0,51	0,37	0,37	1,32	0,12	1,52	1,32
. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
8	Механизированный труд	маш.-смен.	0,26	0,26	0,4	0,32	0,4	0,51	1,1	1,36
9	Производственные затраты	руб.	98	98	70	70	90	125	150	90
10	Тракторы общего назначения	га эт. п.	2,01	2,01	3,41	3,17	2,54	3,54	5,6	1,5
. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
50	Подсолнечник	га								1
51	Гречиха	»					1			
52	Капиталовложения	руб.								
L	Чистый доход	»	304	15,2	12	12	630	21,2	13	448

Продолжение

№ п/п	Ограничения	...	Тракторы общего назначения (шт.)	Тракторы пропашные (шт.)	Комбайны зерноуборочные (шт.)	...	Привлечение рабочей силы (чел.-дн.)	Долгосрочные кредиты (руб.)	Производственные затраты (руб.)	Объемы ресурсов и тип ограничений
		...	x_{33}	x_{34}	x_{35}	...	x_{45}	x_{46}	x_{47}	
1	Пашня	...				...				≤3 500
2	Конно-ручной труд	...				...	—1			≤76 580
3	В том числе май	...				...	—1			≤6 380
...	....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
8	Механизированный труд	...				...				≤8 970
9	Производственные затраты	...				...			—1	≤0
10	Тракторы общего назначения	...	—220			...				≤19 800
...	....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
50	Подсолнечник	...				...				≤300
51	Гречиха	...				...				≥10
52	Капиталовложения	...	2800	2540	4270	...		—1		≤215 000
L	Чистый доход	...				...			—1	→max

Задание 1. Изучите матрицу задачи по оптимальному сочетанию отраслей в конкретном хозяйстве (табл. 8.3). Определите, какие переменные и ограничения являются основными, какие — дополнительными. Выясните, каков экономический смысл целевой функции, почему в строке целевой функции там, где она пересекается с 47 столбцом, стоит —1, выясните, почему так записаны балансы по использованию кормов.

Задание 2. Составьте матрицу экономико-математической задачи по оптимальному сочетанию отраслей в сельхозпредприятии при следующих условиях: площадь пашни в хозяйстве — 3000 га, трудовые ресурсы в растениеводстве и животноводстве — 200 000 человеко-дней, в том числе в напряженный (август—сентябрь) период — 30 000 человеко-дней, механизированные ресурсы — 15 000 машино-смен.

Растениеводство совхоза представлено следующими культурами: пшеница озимая, ячмень, овощи, картофель, многолетние травы на сено, многолетние травы на зеленый корм, однолетние травы на сено, силосные культуры, кормовые корнеплоды.

В животноводстве имеется крупный рогатый скот молочно-мясного направления и свиноводство. Среднегодовой надой молока от одной коровы составляет 4500 кг, а выход мяса — 1 ц. Хозяйство может закупить комбикормов не более 6000 ц.

Таблица 8.4

Расход питательных веществ в расчете на 1 ц продукции

Питательные вещества	Молоко	Привес крупного рогатого скота	Привес свиней
Кормовые единицы (ц)	1,0	10,0	7,0
Переваримый протеин (ц)	0,1	1,0	1,0
Каротин (г)	6,0	5,0	2,0

В годовом рационе крупного рогатого скота соотношение различных групп кормов должно быть в следующих границах (в процентах к общей потребности кормовых единиц):

концентратов . . . . 20—30
грубых . . . . 20—40
сочных и корнеклубнеплодов . . 20—30
зеленых . . . . 30—40

Таблица 8.5

Нормативы затрат основных ресурсов, урожайность, себестоимость и цена реализации продукции

Виды ресурсов	Озимая пшеница (га)	Ячмень (га)	Овощи (га)	Картофель (га)	Многолетние травы на сено (га)	Многолетние травы на зеленый корм (га)	Однолетние травы на сено (га)	Силосные культуры (га)	Кормовые корнеплоды (га)	Коровы (гол.)	Привес свиней (ц)	Покупные комбикорма (ц)
Затраты труда (чел.-дн.)	7,0	6,0	40,0	30,0	6,0	6,0	10,0	9,0	60,0	30,0	3,0	0,1
Затраты труда в напряженный период (чел.-дн.)	2,0	2,0	8,0	6,0	1,0	1,0	0,5	2,0	5,0	3,0	0,3	0,01
Механизированные ресурсы (машиносмен)	1,2	1,5	3,5	3,0	1,1	1,0	1,2	2,0	4,4	3,0	1,1	0,1
Урожайность (ц/га)	30,0	25,0	300,0	200,0	30,0	130,0	20,0	150,0	350,0	—	—	—
Себестоимость (руб/га)	6,0	4,5	11,0	8,0	2,6	0,8	2,7	0,6	1,6	14,0*/100,0**	120,0***	—
Цена реализации	9,0	6,0	12,0	9,0	3,6	0,85	3,0	0,7	1,9	16,0*/110,0**	140,0***	—

* Себестоимость и цена реализации одного центнера молока.
** Себестоимость и цена реализации центнера говядины.
*** Себестоимость и цена реализации центнера свинины.

Планом предусмотрено сдать государству следующее количество продукции (ц):

зерновых	5 000
картофеля	24 000
овощей	30 000
молока	20 000
мяса крупного рогатого скота	500
привес свиней	10 000

Комбикорма хозяйство приобретает по 9 руб. за 1 ц.

На корм скоту используется 20% валового сбора ячменя, 20% картофеля и 5% овощей. Вся солома зерновых культур, урожайность которой составила: озимой пшеницы — 10,0 ц/га, ячменя — 6 ц/га, также расходуется на корм.

Под зерновые необходимо отвести не менее 60% площади пашни, под многолетние травы — не более 20% площади пашни, причем площадь посева многолетних трав на сено должна быть не менее 50% от общей площади многолетних трав.

Все остальные данные, необходимые для составления задачи, берутся из таблиц 8.5 и 8.6.

Таблица 8.6

Содержание питательных веществ в 1 ц корма

Питательные вещества \ Корма	Пшеница озимая (солома)	Ячмень: зерно	Ячмень: солома	Овощи	Картофель	Многолетние травы на сено	Многолетние травы на зеленый корм	Однолетние травы на сено	Силосные культуры	Корнеплоды	Комбикорма
Кормовые единицы (ц)	0,2	1,2	0,4	0,2	0,3	0,5	0,2	0,4	0,25	0,15	1,2
Переваримый протеин (кг)	0,8	8,0	1,0	1,0	1,0	12,0	2,0	7,0	3,0	1,0	16,0
Каротин (г)	0,3	0,1	0,4	—	—	2,0	6,0	2,0	1,5	2,0	0,1

В качестве критерия оптимальной специализации (оптимального сочетания отраслей) необходимо взять достижение в хозяйстве максимальной массы прибыли [1].

[1] Правильность составления матрицы задачи можно проверить, обратившись к таблице 8.7.

Матрица экономико-математической задачи для определения
(к зада

№ п/п	Ограничения \ Переменные	Ед. изм.	Озимая пшеница (га)	Ячмень (га)	Овощи (га)	Картофель (га)	Многолетние травы на сено (га)
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	Пашня	га	1	1	1	1	1
2	Труд, всего	чел.-дн.	7,0	6,0	40,0	30,0	6,0
3	Труд в напряженный период	чел.-дн.	2,0	2,0	8,0	6,0	1,0
4	Механизированные ресурсы	маш.-смен	1,2	1,5	3,5	3,0	1,1
5	Кормовые единицы	ц	—2,0	—8,4	—3,0	—12,0	—15,0
6	Переваримый протеин	»	—0,08	—0,4	—0,15	—0,4	— 1,8
7	Каротин	г	—3,0	—2,9	0	0	—60,0
8	Концентраты в рационе	корм. ед.	0	6,0	0	0	0
9	Концентраты в рационе		0	6,0	0	0	0
10	Грубые	»	2,0	2,4	0	0	15,0
11	»	»	2,0	2,4	0	0	15,0
12	Зеленые	»	0	0	0	0	0
13	»	»	0	0	0	0	0
14	Сочные и корнеплоды	»	0	0	3,0	12,0	0
15	Сочные и корнеплоды	»	0	0	3,0	12,0	0
16	Сдача зерновых	»	30,0	20,0	0	0	0
17	» овощей	»	0	0	285,0	0	0
18	» картофеля	»	0	0	0	160,0	0
19	» молока	»	0	0	0	0	0
20	» мяса КРС	»	0	0	0	0	0
21	» мяса свиней	»	0	0	0	0	0
22	Покупные комбикорма	»	0	0	0	0	0
23	Площадь под зерновыми	га	1	1	0	0	0
24	Площадь под многолетними травами	»	0	0	0	0	1
25	Структура посева многолетних трав	»	0	0	0	0	0,5
L	Прибыль	руб.	90,0	30,0	285,0	160,0	0

Таблица 8.7

оптимальной специализации и сочетания отраслей в хозяйстве нию 2)

Многолетние травы на зеленый корм (га)	Однолетние травы на сено (га)	Силосные культуры (га)	Кормовые корнеплоды (га)	Коровы (голов)	Привес свиней (ц)	Покупные комбикорма (ц)	Размеры и вид ограничений
x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	
1	1	1	1	0	0	0	⩽3 000
6,0	10,0	9,0	60,0	30,0	3,0	0,1	⩽200 000
1,9	0,5	2,0	5,0	0,3	0,3	0,01	⩽30 000
1,0	1,2	2,0	4,4	3,0	1,1	0,1	⩽15 000
—26,0	—8,0	—37,5	—52,5	55,0	7,0	—1,2	⩽0
—2,6	—1,4	—45,0	—3,5	5,5	1,0	—0,16	⩽0
—780,0	—40,0	—225,0	—700,0	275,0	2,0	—0,1	⩽0
0	0	0	0	—11,0	0	1,2	⩾0
0	0	0	0	—16,5	0	1,2	⩽0
0	8,0	0	0	—11,0	0	0	⩾0
0	8,0	0	0	—22,0	0	0	⩽0
26,0	0	0	0	—16,5	0	0	⩾0
26,0	0	0	0	—22,0	0	0	⩽0
0	0	37,5	52,5	—11,0	0	0	⩽0
0	0	37,5	52,5	—16,5	0	0	⩽0
0	0	0	0	0	0	0	⩾5 000
0	0	0	0	0	0	0	⩾30 000
0	0	0	0	0	0	0	⩾24 000
0	0	0	0	45,0	0	0	⩾20 000
0	0	0	0	1,0	0	0	⩾500
0	0	0	0	0	1	0	⩾10 000
0	0	0	0	0	0	1	⩽6 000
0	0	0	0	0	0	0	⩾1 800
0	0	0	0	0	0	0	⩽600
—1	0	0	0	0	0	0	⩾0
0	0	0	0	100,0	20,0	—9,0	→ max

Задание 3. На основании условий предыдущей задачи (задание 2) постройте развернутую модель задачи (запишите все условия в виде системы линейных уравнений и неравенств). В качестве возможных критериев оптимальности взять показатели: максимальная масса прибыли, максимальный выход валовой продукции, минимальные затраты на производство всей продукции (минимальная себестоимость) и максимальный уровень рентабельности, которые также следует записать в развернутом виде. Обоснуйте, какой из названных показателей наилучшим образом соответствует цели развития хозяйства, поставленной задаче, и поясните, все ли эти показатели в равной степени могут быть использованы в качестве целевой функции при решении задачи симплексным методом.

ГЛАВА 9
ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОСЕВОВ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОРМОВЫХ РАЦИОНОВ В СОЧЕТАНИИ С ЗЕЛЕНЫМ КОНВЕЙЕРОМ

При планировании сельскохозяйственного производства одной из главных задач является связь оптимального планирования животноводства с оптимизацией кормовых рационов, зеленого конвейера и структуры стада. Решение этих вопросов в рамках одной экономико-математической задачи представляет значительный интерес, поскольку структура стада, кормовые рационы и тип кормления животных в конечном счете оказывают решающее влияние на выбор оптимальной структуры производства и его эффективность.

В данной главе рассматривается методика составления такой экономико-математической задачи, приводится анализ вариантов решений ее с различными критериями оптимизации на примере совхозов Белгород-Днестровского треста.

§ 1. Постановка задачи

Большинство совхозов Белгород-Днестровского треста являются многоотраслевыми хозяйствами, производителями товарной продукции земледелия и животноводства одновременно. Для таких хозяйств расчеты оптимальной структуры посевов нельзя выполнить изолированно от животноводства. Только комплексная задача, в которую введены все отрасли и производственные ресурсы района, позволяет рассчитать оптимальный вариант. Такая задача формулируется следующим образом.

Определить на перспективу специализацию производства в тресте и сочетание главных и дополнительных отраслей, чтобы при имеющихся производственных ресурсах получить максимум валовой продукции в денежном выражении с возможно наименьшими материально-денежными затратами.

В этой задаче решаются следующие вопросы:

— оптимальное сочетание отраслей растениеводства и животноводства, при котором достигается наилучший результат;

— наиболее целесообразное использование пашни;

— развитие отраслей растениеводства, размеры посевных площадей под отдельными культурами, использование продукции этих культур;

— оптимальная структура кормопроизводства и зеленого конвейера по месяцам;

— уровень производства продукции и плотность поголовья животных;

— оптимальное сочетание отдельных отраслей животноводства при определенном производственном направлении, рационы кормления и продуктивность животных. Оценка наиболее эффективного варианта развития животноводства — за счет увеличения поголовья стада или за счет роста его продуктивности;

— необходимость приобретения кормов и кормовых добавок, сельскохозяйственной техники, а также привлечения рабочей силы.

Поставленная экономико-математическая задача решалась по критериям оптимальности: максимум валовой продукции и максимум чистого дохода. При расчете чистого дохода по отраслям животноводства из стоимости валовой продукции исключаются производственные затраты, но стоимость кормов в них не включена, так как последняя определяется лишь в результате решения задачи.

Исходя из сделанного экономического анализа сельскохозяйственного производства в совхозах района, был установлен перечень переменных (культур и от-

13 Заказ № 2009

раслей производства), а также перечень всех видов ограничений (условий производства).

При определении перечня отраслей, включаемых в расчет, пришлось учитывать не только особенности технологии производства, но и использование произведенной продукции. Это относилось прежде всего к тем культурам, которые, являясь товарными, могут быть использованы на кормление животных. Поэтому такие культуры, как озимый ячмень, кукуруза и кормовые травы, включены в расчет по два раза. В том случае, когда на корм идет не основная продукция, а побочная (солома, ботва), то она учитывается в виде доли данной культуры, поступающей на кормовые цели.

Приведем перечень всех переменных и ограничений. По растениеводству переменные выражают количество гектаров посева, а по животноводству — количество структурных голов или привеса скота (в ц).

Переменные по сельскохозяйственным культурам:

x_1 — пшеница озимая товарная,
x_2 — рожь озимая товарная,
x_3 — ячмень озимый товарный,
x_4 — кукуруза на зерно товарная,
x_5 — ячмень яровой и овес товарные,
x_6 — просо товарное,
x_7 — горох товарный,
x_8 — пшеница яровая товарная,
x_9 — ячмень озимый фуражный,
x_{10} — ячмень яровой и овес фуражные,
x_{11} — кукуруза на зерно фуражная,
x_{12} — горох фуражный,
x_{13} — просо фуражное,
x_{14} — подсолнечник,
x_{15} — картофель товарный,
x_{16} — овощные культуры товарные,
x_{17} — бахча продовольственная,
x_{18} — однолетние травы на сено,
x_{19} — кормовые корнеплоды,
x_{20} — сахарная свекла,
x_{21} — смесь (кукуруза+соя+суданская трава) первого срока посева,
x_{22} — кукуруза на силос,
x_{23} — многолетние травы на сено,
x_{24} — многолетние травы на зеленый корм,
x_{25} — смесь (озимая рожь+вика+подсолнечник),

x_{26} — смесь (пшеница+рожь+вика),
x_{27} — овсяная смесь,
x_{28} — первый укос смеси (кукуруза+соя+суданская трава),
x_{29} — первый укос смеси (кукуруза+соя+суданская трава второго срока посева),
x_{30} — первый укос смеси (соя+суданская трава поздних сроков посева),
x_{31} — смесь, посеянная в другие сроки,
x_{32} — арбузы и тыква кормовые,
x_{33} — пожнивные посевы.

Переменные по животноводству:
x_{34} — структурные головы крупного рогатого скота,
x_{35} — изменение в рационе по концентрированным кормам,
x_{36} — изменение в рационе по грубым кормам,
x_{37} — изменение в рационе по сочным кормам,
x_{38} — изменение в рационе по корнеплодам,
x_{39} — первый рацион для свиней,
x_{40} — второй рацион для свиней,
x_{41} — первый рацион для овец,
x_{42} — второй рацион для овец,
x_{43} — птица,
x_{44} — приобретение техники,
x_{45} — приобретение трикальцийфосфата,
x_{46} — приобретение кормов животного происхождения,
x_{47} — излишки соломы, выделяемой на подстилку, но используемой на корм скоту,
x_{48} — денежно-материальные затраты,
x_{49} — жмых,
x_{50} — комбикорм,
x_{51} — привлечение рабочей силы,
x_{52} — прирост продуктивности крупного рогатого скота по молоку,
x_{53} — недостаток навоза.

Запишем ограничения, указав в скобках их типы и объемы, записанные в матрице.

1. Пашня, га ($\leqslant 80\,000$);
2. Конно-ручной труд, всего человеко-дней ($\leqslant 2\,152\,585$);
3. Конно-ручной труд в период наибольшего напряжения (май), человеко-дней ($\leqslant 384\,400$);
4. Конно-ручной труд (июнь), человеко-дней ($\leqslant 399\,776$);

5. Конно-ручной труд (июль), человеко-дней (⩽457 461);
6. Конно-ручной труд (август), человеко-дней (⩽457 461);
7. Конно-ручной труд (сентябрь), человеко-дней (⩽399 776);
8. Механизированный труд, машино-смен (⩽293 434);
9. Денежно-материальные затраты, руб. (=0,001);
10. Кормовые единицы, ц (⩽317 990);
11. Переваримый протеин, ц (⩽34 245);
12. Кальций, ц (⩽1467,7);
13. Фосфор, ц (⩽856,1);
14. Каротин, г (⩽1 834 600);
15. Концентрированные корма, ц корм. ед. (⩽0);
16. Грубые корма, ц корм. ед. (⩽0);
17. Сочные корма, ц корм. ед. (⩽0);
18. Корнеплоды, ц корм. ед. (⩽0);
19. Зеленые корма, ц корм. ед (⩽34 245);
20. Прирост концентрированных кормов в рационе, ц корм. ед. (⩽0);
21. Прирост грубых кормов, ц корм. ед. (⩽0);
22. Прирост сочных кормов, ц корм. ед. (⩽0);
23. Прирост корнеплодов, ц корм. ед (⩽0);
24. Всего прирост кормов в рационе, ц корм. ед. (=0);
25. Зеленые корма (май), ц корм. ед. (⩽5707,5);
26. Зеленые корма (июнь), ц корм. ед. (⩽5707,5);
27. Зеленые корма (июль), ц корм. ед. (⩽5707,5);
28. Зеленые корма (август), ц корм. ед. (⩽5707,5);
29. Зеленые корма (сентябрь), ц корм. ед. (⩽5707,5);
30. Зеленые корма (октябрь), ц корм. ед. (⩽5707,5);
31. Трикальцийфосфат, ц (⩽100 000);
32. Мясо-костная мука, ц (⩽88 960);
33. Комбикорм, ц (⩽4771);
34. Жмых (⩽4771);
35. Подстилка всего, ц (⩽0);
36. Внесение навоза, т (⩽0);
37. Пожнивные посевы, га (⩽0);
38. Зерно товарное, ц (⩾76 020);
39. Пшеница озимая, ц (⩾114 052);
40. Молоко, ц (⩾290 000);
41. Мясо, ц (⩾136 500);

42. Шерсть, ц ($\geqslant$2800);
43. Птица, голов ($\geqslant$33 800);
44. Овощные культуры, га ($\geqslant$373);
45. Картофель, га ($\geqslant$133);
46. Подсолнечник, га ($\leqslant$3917);
47. Прирост продуктивности КРС по молоку, ц ($\leqslant$0);
48. Соотношение грубых кормов, в % ($\leqslant$0).

Таким образом, модель экономико-математической задачи имеет 53 переменных и 48 ограничений.

§ 2. Расчет технико-экономических коэффициентов и матрица задачи

Все ограничения по производственным ресурсам связываются коэффициентами с переменными, обозначающими площади возделываемых культур и поголовье животных. Технико-экономическими коэффициентами экономико-математической задачи являются в основном нормы производственных затрат на 1 га по каждой сельскохозяйственной культуре и количество питательных веществ, содержащихся в кормах, полученных с 1 га площади. В животноводческих отраслях — это затраты и выход продукции от одной головы. Коэффициенты рассчитаны по данным технологических карт, разработанных на перспективу для совхозов района.

Рассмотрим, как формируются технико-экономические коэффициенты при переменных, обозначающих товарные и фуражные культуры, а также отдельные отрасли животноводства.

Для каждой переменной, выражающей количество гектаров товарной или фуражной культуры (с учетом основной и побочной продукции), подготавливались данные, которые характеризуют распределение указанной продукции с учетом основной и побочной и содержание питательных веществ в ней, а также создание страховых фуражных фондов в размерах: грубых и концентрированных кормов — 10%, силоса — 15—20%.

Расчет всех технико-экономических коэффициентов при переменных покажем на примере проса товарного (x_6).

По первому ограничению записывается единица — доля затрат земли (га) на производство проса товарного.

Затраты производственных ресурсов на 1 га составляют: трудовых ресурсов — всего 4 человеко-дня, в том числе в мае — 1,48, в июне — 1,48, в июле — 0,88, в августе — 0,01, в сентябре — 0,08 человеко-дня.

По ограничению 8 было записано число, характеризующее норму затрат механизированного труда в машино-сменах на 1 га, оно равно 0,93.

По ограничению 9 коэффициентов переменной x_6 будут материально-денежные затраты в рублях. По технологическим картам этот коэффициент равен 42,3 руб. Он проставляется на пересечении девятой строки и шестого столбца.

Коэффициенты для переменной x_6 в ограничениях с 10 по 16 приведены в таблице 9.1.

Таблица 9.1

Расчет питательных веществ в основной и побочной продукции

Корма	Количество продукции (ц)	Содержание в корме питательных веществ				
		кормовых единиц (кг)	переваримого протеина (кг)	кальция (кг)	фосфора (кг)	каротина (мг)
Зерноотходы (5% от урожая проса)	1,0	96	8,40	0,110	0,310	100
Солома просяная	19,8	812	47,52	12,672	1,782	19 800
Итого питательных веществ	—	908	55,92	12,782	2,092	19 900

Урожайность проса принята 19,8 ц с 1 га с соотношением основной и побочной продукции 1 : 1. Из таблицы видно, что в основной и побочной продукции содержится 9,08 ц кормовых единиц, 0,56 ц переваримого протеина, 0,13 ц кальция, 0,02 ц фосфора и 19,9 г каротина.

Сумма полученных кормовых единиц является технико-экономическим коэффициентом по десятому ограничению. Количество переваримого протеина, кальция, фосфора и каротина, полученных с 1 га посева проса, является коэффициентами в ограничениях с 11 по 14 включительно.

Чтобы получить коэффициенты, характеризующие использование продукции, производится ее распределение на: зерно товарное — 18,5 ц, семена — 0,3 ц, отходы на корм — 1 ц, солома на корм — 19,8 ц.

Эти коэффициенты записываются по соответствующим ограничениям.

Из проведенного анализа кормления животных было установлено, что на 1 кг сена совхозы скармливали в среднем по 4 кг соломы. Исходя из сказанного, мы в последнем ограничении отражаем соотношение грубых кормов, то есть соломы и сена в рационе крупного рогатого скота. Коэффициент в этом ограничении равен 4,06 ц кормовых единиц.

Завершается формирование матрицы экономико-математической модели разработкой коэффициентов для целевой функции. Стоимость продукции с 1 га в функции при переменной x_6 составляет:

$$6{,}5 \text{ руб.} \times 19{,}8 = 128{,}7 \text{ руб.}$$

Так исчисляются технико-экономические коэффициенты при всех остальных переменных, которые обозначают товарные культуры. Расчет технико-экономических коэффициентов для кормовых культур имеет некоторые особенности. Приведем пример по многолетним травам.

Переменной x_{23} обозначен размер посевной площади, которая занята многолетними травами, предназначенными для использования на корм скоту.

В матрице экономико-математической задачи в соответствующих клетках первого ограничения записана цифра 1,06, а по другим кормовым культурам стоит цифра 1. Здесь имеется в виду, что на каждый гектар, занятый под многолетними травами, необходимо 0,06 га пашни для удовлетворения потребности в семенах.

В ограничениях с 2 по 7 записаны соответственно все затраты труда на 1 га по многолетним травам и по месяцам напряженного периода. Затраты труда, техники и денежно-материальных средств по культурам, которые используются на сено и второй укос на зеленый корм, рассчитываются пропорционально выходу продукции.

По ограничению 10 рассчитывается количество кормовых единиц в урожае сена и прибавляется количество кормовых единиц в урожае зеленой массы, полученных с гектара площади. Общая сумма и записывается в этом ограничении, в том числе по грубым кормам 22,5 ц кормовых единиц в ограничении 16 и 31,94 ц кормовых единиц по зеленым кормам в ограничении 27. Таким образом, с 1 га многолетних трав получено сена для зимнего периода и второй укос зеленой массы в июле.

Количество питательных веществ, содержащихся в общем урожае с 1 га (переваримого протеина, кальция, фосфора и каротина), отражается соответственно в ограничениях 10, 11, 12, 13, 14.

В ограничении 48 по данной переменной записывается, согласно условию задачи, урожай только грубого корма (сена), увеличенного в два раза, с отрицательным знаком. Это ограничение записывается следующим образом:

$$4{,}86x_3+5{,}18x_4+3{,}56x_5+4{,}06x_6+2{,}21x_7+1{,}6x_8+ \\ +4{,}37x_9+2{,}76x_{10}+4{,}66x_{11}+1{,}98x_{12}+3{,}6x_{13}- \\ -46{,}8x_{18}-44{,}1x_{23}\leqslant 0.$$

То есть сено однолетних и многолетних трав и солома должны быть в соотношении 1 : 4.

В целевой строке по переменной x_{23} записываются нулевые оценки.

По такому же принципу формируются коэффициенты и по другим кормовым культурам.

При подготовке информации важное значение имеют данные для расчета зеленого конвейера. Все коэффициенты по зеленому конвейеру приведены в расширенной модели, а расчетная схема зеленого конвейера по месяцам и декадам представлена в таблице 9.2.

Для сокращения количества переменных в модель задачи по зеленому конвейеру не включена переменная по естественным сенокосам. Зная урожайность и площадь, можно подсчитать количество кормов, поступающих с естественных сенокосов. Всего таких угодий в тресте 20 801 га. С этой площади хозяйства получают 317 990 ц кормовых единиц, 34 245,12 ц переваримого протеина, 1467,65 ц кальция, 856,12 ц фосфора и 1834,5 кг каротина. Это количество и записывается в ограничения с 10 по 14 непосредственно в столбец свободных членов, причем количество кормовых единиц необходимо было распределить по месяцам.

Несколько сложнее расчет технико-экономических коэффициентов по переменным, которые обозначают животноводческие отрасли. Покажем это на примере переменной x_{34}, характеризующей количество структурных голов крупного рогатого скота.

Оптимальная структура стада крупного рогатого скота определяется на основе решения соответствующей задачи и в данном случае составляет: коровы — 41%, быки-производители — 0,2%, нетели — 8%, молодняк до 6 месяцев — 18%, молодняк до 12 месяцев — 17%, молодняк старше года — 15,8%.

По каждой половозрастной группе рассчитываются годовые затраты всех видов производственных ресурсов. Было определено, что на одну структурную голову крупного рогатого скота затраты труда составили: всего за год — 54,31 человеко-дня, в том числе в расчете на месяц — 4,52 человеко-дня. По технологическим картам за год на одну структурную голову приходится 1,344 машино-смены.

Денежно-материальные затраты составили 174,32 руб. (без стоимости кормов).

Нами рассчитано, что на 100 голов крупного рогатого скота приходится 7147 руб. денежно-материальных затрат. Если эту цифру разделить на 41 (% коров в стаде), то получаем затраты на одну структурную голову, равные 174,32 руб. По нормам кормления животных рассчитывают годовую потребность в питательных веществах для каждой половозрастной группы. Общее количество питательных веществ по всем группам делят на число коров в стаде и определяют потребность в питательных веществах на одну структурную голову. По нашему расчету, на одну структурную голову необходимо в год следующее количество питательных веществ: кормовых единиц — 63,61 ц, переваримого протеина — 687,38 кг, кальция — 45,12 кг, фосфора — 28,85 кг, каротина — 227,5 г.

За счет карбамида обеспечивается удовлетворение в переваримом протеине на одну структурную голову около 50 кг годовой потребности, а остальные коэффициенты остаются без изменения и записываются в соответствующие ограничения экономико-математической задачи.

Баланс по кальцию и фосфору будет обеспечен за счет трикальцийфосфата.

Расчетная схема зеленого

Наименование культур \ Месяцы и декады	Календарные сроки посева	Урожай зеленой массы (ц)
1. Озимая ржано-виковая смесь+весенний подсев ранних яровых	25/VIII—10/IX	200—300
2. Озимая пшеница+озимая вика+ +весенний подсев ранних яровых	5—15/IX	150—250
3. Смесь озимой ржи с пшеницей+озимая вика	1—15/IX	150—250
4. Первый укос многолетних трав прошлых лет		125—200
5. Отава смеси (см. п. 2)		75—100
6. Овес в смеси с бобовыми (+подсев по всходам суданской травы)	5—10/III	125—175
7. Первый укос смеси (подсолнечник+горох+кукуруза+соя+суданская трава)	25/III—5—25/IV	150—200
8. Второй укос многолетних трав прошлых лет		75—125
9. Первый укос смеси (кукуруза+ +соя+суданская трава)	20—25/IV	125—200
10. Кабачки	25—30/IV	200—350
11. Второй укос смеси ранних и поздних злаковых бобовых культур	10/IV	125—150
12. Первый укос второго срока посева смеси (кукуруза+соя+суданская трава)	15—20/V	150—200
13. Второй укос смеси (кукуруза+ +соя+суданская трава)		125—150
14. Второй укос второго срока посева смеси (кукуруза+соя+суданская трава)		75—100
15. Второй укос поукосной смеси (кукуруза+соя+суданская трава)		75—100
16. Пожнивные посевы кукурузы	5—20/VIII	75—125
17. Арбузы и тыква кормовые	1—5/V	250—350
18. Корнеплоды	5—10/IV	250—350
19. Ботва свеклы	—	75—100
20. Посев сложной смеси (озимая рожь+озимая вика+ранние яровые и бобовые)	1—10/VIII	250—350
21. Естественные кормовые угодья	—	25—250

Таблица 9.2

конвейера по месяцам и декадам

Апрель			Май			Июнь			Июль			Август			Сентябрь			Октябрь		
I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
		—	—	—																
				—	—	—														
		—	—	—	—	—														
				—	—	—														
					—	—														
							—	—												
							—	—	—											
							—	—	—	—										
								—	—	—	—									
									—	—	—	—	—	—						
								—	—	—										
									—	—	—									
											—	—	—							
												—	—	—						
												—	—	—						
																—	—	—		
																—	—	—	—	—
																—	—	—	—	—
																	—	—	—	—
	—	—	—	—																
																		—	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

В соответствии с зоотехническими требованиями доля отдельных групп кормов в общем количестве кормовых единиц рациона может изменяться: концентрированные корма — от 10 до 35%, грубые корма — от 12 до 35, сочные корма — от 30 до 56, корнеплоды — от 5 до 10%.

По концентрированным кормам границы рациона колеблются: от 6,36 ц кормовых единиц по нижней границе до 22,26 ц кормовых единиц по верхней границе, по грубым кормам соответственно от 3,82 до 11,13, по сочным от 9,54 до 17,08 и по корнеплодам от 1,59 до 3,28 ц кормовых единиц.

Ввиду того, что концентраты используются примерно равномерно на протяжении года, процент их необходимо взять от общего количества питательных веществ, а другие корма взяты из расчета полугодовой потребности.

Следует заметить, что при установлении допустимых границ питательных веществ совершенно нет необходимости заранее балансировать рацион по количеству, это будет достигнуто в ходе расчета на электронно-вычислительной машине. По каждой половозрастной группе скота и птицы приводится информация о допустимом содержании отдельных видов кормов в суточном рационе. Такие данные обосновываются исходя из физиологических особенностей конкретных групп животных.

На летний период для одной головы крупного рогатого скота необходимо 27 ц кормовых единиц зеленого и более 4 ц кормовых единиц концентрированного корма. Так как зеленый конвейер рассчитан на 6 месяцев, то в каждый месяц на одну структурную голову приходится по 4,5 ц кормовых единиц зеленого корма, что и записывается в ограничениях с 25 по 30 включительно.

В следующем ограничении записано по переменной x_{34} — количество соломы для подстилки в расчете на одну структурную голову. Математически это условие записывается так:

$$-27x_1-20x_2+6x_{34}\leqslant 0,$$

то есть количество соломы, полученное с 1 га озимой пшеницы (x_1) и озимой ржи (x_2), должно быть больше, чем потребность в ней для одной головы.

Таблица 9.3

Матрица задачи по оптимизации кормопроизводства и кормовых рационов на перспективу в совхозах Белгород-Днестровского треста

i	Ограничения	Ед. изм.	Пшеница озимая товарная	Рожь товарная	Ячмень озимый товарный	Кукуруза на зерно товарная	Ячмень яровой и овес товарный	...	Привлечение рабочей силы	Прирост продукции по молоку	Недостаток навоза	Объем и тип ограничения
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...	x_{51}	x_{52}	x_{53}	
1	Пашня	га	1	1	1	1	1	...				⩽80
2	Конно-ручной труд — всего	чел.-дн.	4,7	3,51	3,51	14	3,51	...	—252	0,6		⩽2152,6
	В том числе:											
3	май	»	0,99	0,50	0,50	4,2	0,59	...	—250	0,05		⩽334,4
4	июнь	»	0,71	1,50	1,50	2,66	1,50	...	—251	0,05		⩽399,8
5	июль	»	2,30	1,169	1,169	2,66	1,169	...	—249	0,05		⩽457,5
6	август	»	0,42	0,21	0,21	4,06	0,21	...	—248	0,05		⩽457,5
7	сентябрь	»						...	—247	0,05		⩽400
8	Механизированный труд	маш.-смен	0,50	0,50	0,50	1,14	0,43	...				⩽293,4
9	Производственные затраты	руб.	40,8	39	40,8	62,7	33,31	...		10		=0,001
10	Кормовые единицы	ц	—1,62	—1,18	—11,4	—12,2	—8,3	...		14		⩽318

Продолжение

	Ограничения	Ед. изм.	Пшеница озимая товарная x_1	Рожь товарная x_2	Ячмень озимый товарный x_3	Кукуруза на зерно товарная x_4	Ячмень яровой и овес товарный x_5	...	Привлечение рабочей силы x_{51}	Прирост продукции по молоку x_{52}	Недостаток навоза x_{53}	Объем и тип ограничения
11	Переваримый протеин	ц	—0,16	—0,10	—0,43	—0,73	—0,32	...		0,7		≤34,2
12	Кальций	»	—0,001	—0,001	—0,101	—0,13	—0,07	...				≤1,47
13	Фосфор	»	—0,01	—0,003	—0,04	—0,55	—0,03	...				≤0,85
14	Каротин	г	—0,14	—0,02	—10,94	—11,75	—8,02	...				≤1834,6
15	Концентрированные корма	ц корм. ед.	—1,62	—1,18	—1,63	—1,88	—1,21	...				≤0
16	Грубые	то же			— 9,72	—10,36	—7,13	...				≤0
17	Сочные	» »						...				≤0
18	Корнеплоды	» »						...				≤0
19	Зеленые	» »						...				≤34,25
20	Концентрированные корма	» »						...				≤0
21	Грубые	» »						...				≤0
22	Сочные	» »						...				≤0
23	Корнеплоды	» »						...				≤0
24	Всего прирост	» »						...				=0

								…				
25	Зеленые корма:							…				≤5,71
26	май	» »						…				≤5,71
27	июнь	» »						…				≤5,71
28	июль	» »						…				≤5,71
29	август	» »						…				≤5,71
30	сентябрь	» »						…			—1	≤5,71
31	октябрь	» »						…				
32	Трикальцийфосфат	ц						…				≤100
33	Мясо-костная мука	»						…				≤88,96
34	Комбикорм	»						…				≤4,77
35	Жмых	»						…				≤4,77
36	Подстилка	»	—27	—20				…				≤0,0035
37	Внесение навоза	т	15			15		…				=0,0036
38	Пожнивные посевы	га	0,5	0,5	0,5			…				≤0
39	Зерно товарное	ц		17	23,65	26,4	16,8	…				≤76,02
40	Пшеница озимая	»	23,6					…				≥114,05
41	Молоко	»						…				≥290
42	Мясо	»						…				≥136,5
43	Шерсть	»						…				≥2,8
44	Птица	голов						…				≥33,8
45	Овощные	га						…				≥0,373
46	Картофель	»						…				≥0,133
47	Подсолнечник	»						…				≤3,9
	Прирост продукции КРС	ц						…		1		≤0
48	Соотношение кормов	—			4,86	5,18	3,56	…				≤0
	L_{max}	руб.	121,5	90	6,75	112	32	…	0	0	0	

Осталось записать коэффициенты, характеризующие выход продукции от одной структурной головы. В ограничении 36 указан выход навоза, а в ограничениях 40 и 41 — количество молока и мяса. На одну корову было запланировано получить 30 ц молока и 1,79 ц мяса. По ограничению 47 записывается прирост молочной продуктивности коров. Он не должен превышать коэффициента при переменной x_{34} (−2). В заключение по переменной x_{34}, характеризующей крупный рогатый скот, рассчитываем коэффициент целевой функции. Коэффициентом при переменной x_{34} является стоимость валовой продукции, полученной в расчете на одну структурную голову (корову):

15,5 руб.×12,3 ц молока=190,65 руб.;

106,65 руб.×1,79 ц мяса=190,90 руб.

В итоге выход валовой продукции от одной структурной головы равен 381,55 руб.

Описываемая модель задачи позволяет рассчитать оптимальные рационы для всех групп скота. Но если в хозяйстве много видов скота, то это усложняет задачу и увеличивает ее размеры. Поэтому в целях сокращения объема задачи допущено предварительное определение нескольких наиболее эффективных рационов, с указанием их структуры по видам кормов. В таком случае требуется обеспечить тщательное балансирование по видам кормов и суммарной потребности в питательных веществах. Сокращенная матрица задачи представлена в таблице 9.3, объемы ограничений при этом уменьшены на 1000.

§ 3. Результаты решения задачи и их анализ

Данная задача решалась на ЭВМ «Минск-22» по программе симплексного метода.

Оптимальные решения получены при следующих значениях базисных переменных (табл. 9.4).

Из приведенных результатов видно, что в каждом конкретном случае в зависимости от принятой цели ведения хозяйства нужно внимательно подходить к выбору критерия оптимизации. Так, при первом критерии денежно-материальные затраты составили 11 974 540 руб., а при критерии на максимум валовой продукции — 65 459 590 руб. Самую высокую оценку

Таблица 9.4

Результаты решения задачи

Показатели	Ед. изм.	По критерию— максимум чистого дохода	По критерию— максимум валовой продукции
x_1 — озимая пшеница	га	25 447	20 360
x_2 — озимая рожь	»	4 472	4 472
x_9 — озимый ячмень фуражный	»	8 234	3 654
x_{11} — кукуруза на зерно фуражная	»	15 020	17 626
x_{14} — подсолнечник	»	3 901	3 878
x_{15} — картофель	»	133	133
x_{16} — овощи	»	373	9 713
x_{20} — сахарная свекла	»	2 439	2 049
x_{22} — кукуруза на силос	»	9 6,81	8 365
x_{23} — многолетние травы на сено	»	2 531	2 118
x_{24} — многолетние травы на зеленый корм	»	2 162	—
x_{25} — смесь озимой ржи с викой	»	1 276	1 497
x_{29} — первый укос смеси (кукуруза+соя+суданская трава второго срока посева)	»	495	625

Продолжение

Показатели	Ед. изм.	По критерию — максимум чистого дохода	По критерию — максимум валовой продукции
x_{30} — первый укос смеси (соя+суданская трава позднего срока посева)	га	3 885	5 509
x_{33} — пожнивные посевы	»	14 933	10 810
x_{34} — структурные головы крупного рогатого скота	голов	9 576	10 087
x_{36} — изменение в рационе по грубым кормам	ц корм. ед.	69 999	54 871
x_{37} — изменение в рационе по сочным кормам	» » »	61 285	83 417
x_{38} — изменение в рационе по корнеплодам	» » »	15 225	16 038
x_{40} — второй рацион для свиней	ц	131 754	103 959
x_{41} — первый рацион для овец	голов	39 237	—
x_{42} — второй рацион для овец	»	13 593	52 830
x_{43} — птицеводство	»	50 000	50 000
x_{45} — приобретение трикальцийфосфата	ц	1 301	—
x_{46} — приобретение кормов животного происхождения	»	—	88 960
x_{48} — денежно-материальные затраты	руб.	11 974 540	65 459 590
x_{51} — привлечение рабочей силы	человек	1 411	4 656
x_{53} — недостача навоза	т	173 821	379 282

в целевой функции получила переменная x_{16} (площадь под овощами), которая равна 546 руб. При решении задачи на максимум валовой продукции она вошла в оптимальный план в количестве 9713 га, а при критерии максимум чистого дохода — всего лишь 373 га. Это объясняется тем, что высокие денежно-материальные затраты на производство овощей были учтены при решении задачи по критерию максимизации чистого дохода.

При максимизации чистого дохода требуется увеличить площадь под кукурузой на силос на 1316,8 га, а площадь под однолетними травами на зеленый корм уменьшить с 1497 до 1276 га.

Как в первом, так и во втором вариантах количество производимой животноводческой продукции сводится к минимуму, который определен планом сдачи продукции государству. Объясняется это тем, что растениеводческие отрасли более рентабельны. Поэтому в структуре посевов на первое место выдвигаются зерновые, вытесняя пропашные культуры. В животноводстве только птицеводство получает большое развитие. Если эту отрасль не ограничивать сверху, то в оптимальном плане птицы должно быть 11,3 млн. голов, в то время как для выполнения плана нужно всего лишь 32,8 тыс. голов.

Несмотря на различные результаты при разных критериях оптимизации, структура производства с одновременной оптимизацией кормовых рационов значительно отличается от контрольного варианта, рассчитанного экономистами района при тех же нормативах. При оптимальном варианте экономическая эффективность производства намного превышает план. Количество продукции и плотность поголовья животных на 100 га земельных угодий гораздо выше, чем предусмотрено перспективным планом.

Расчеты по двум критериям оптимизации показали, что наибольшая эффективность достигается по критерию максимум чистого дохода, и этому решению, следовательно, надо отдать предпочтение.

Структура посевных площадей при оптимальном варианте и расчетная структура кормопроизводства приведены в таблицах 9.5 и 9.6.

Оптимальная структура посевных площадей в значительной мере отличается от фактической и от плановой, определенной обычными методами. Анализ показывает, что при оптимальной структуре можно произвести больше животноводческой продукции при значительно меньших затратах на корма.

Таблица 9.5

Структура посевных площадей (%)

Сельскохозяйственные культуры	Оптимальный вариант плана	Обычный вариант плана
Вся посевная площадь	100	100
I. Зерновые культуры	66,46	59,02
В том числе:		
озимые	47,69	30,65
из них озимая пшеница	31,80	18,38
яровые	18,78	2,37
из них кукуруза	18,78	13,61
II. Технические культуры	4,87	4,60
В том числе подсолнечник	4,87	4,60
III. Овоще-бахчевые и картофель	0,63	0,84
IV. Кормовые культуры	28,04	35,54
В том числе:		
кормовые корнеплоды и бахчевые	3,05	4,03
кукуруза	12,10	12,50
многолетние травы	5,86	10,83
однолетние травы	7,03	8,18

Структура посевных площадей позволяет в оптимальном варианте лучше использовать имеющиеся ресурсы. Оптимальный план обеспечивает производство необходимого количества хлеба для сдачи государству и удовлетворения внутрихозяйственных потребностей, а также создание семенных и страховых фондов. Причем выполнение плана хлебосдачи идет за счет озимой пшеницы, занимающей 31,8% посевной площади.

По оптимальному плану кормовые культуры занимают площадь 45 674 га, из них более 15 000 га — кукуруза полной спелости на фураж. Площадь под многолетними травами на зеленый корм по оптимальному плану увеличится более чем на 1000 га. Это позволит произвести за счет собственных кормовых ресурсов более чем 300 тыс. ц молока и увеличить поголовье животных.

Объем производства основных сельскохозяйственных продуктов приведен в таблице 9.7.

Таблица 9.6

Фактическая и оптимальная структура кормопроизводства

Переменные	Кормовые культуры	Фактически		По оптимальному варианту плана		По обычному плану	
		площадь (га)	%	площадь (га)	%	площадь (га)	%
x_9	Ячмень озимый	7 584	9,18	8 234	10,29	9 814	12,27
x_{11}	Кукуруза на зерно	13 032	15,78	15 020	18,78	10 888	13,61
x_{20}	Сахарная свекла	1 171	1,42	2 439	3,05	1 400	1,75
x_{22}	Кукуруза на силос	10 330	12,51	96,81	12,10	10 000	12,50
x_{23}	Многолетние травы на сено	6 688	8,10	2 531	3,16	7 267	9,08
x_{24}	Многолетние травы на зеленый корм	1 054	1,28	2 162	2,70	1 400	1,75
x_{25}	Смесь (озимая рожь+вика)	700	0,85	1 276	1,60	950	1,19
x_{29}	Первый укос смеси (кукуруза+соя+суданская трава)	2 500	3,03	495	0,62	2 327	2,90
x_{30}	Первый укос смеси (позднего срока сева)	3 500	4,24	3 835	4,79	3 273	4,09
x_{33}	Пожнивные посевы	8 000		14 933		—	
	Всего посевов	82 574	100	80 000	100	80 000	100

Таблица 9.7

Производство основных продуктов

Товарная продукция	Обычный план (ц)	Оптимальный план (ц)	Оптимальный план в % к обычному
Зерно	190 070	676 568	355,96
В том числе пшеница	114 050	600 544	526,56
Молоко	290 000	291 506	100,52
Мясо всех видов	136 500	163 380	119,69
Шерсть	2 800	2 800	100,00
Яйца (тыс. штук)	2 100	700	33,33

Полученный оптимальный план предполагает полное использование пашни и незначительное привлечение рабочей силы. На протяжении года потребуется 2152,6 тыс. человеко-дней, со стороны привлекаются всего 6 рабочих, а энергетические ресурсы используются почти полностью.

Из приведенных данных видно, что производство основных видов продукции при оптимальном плане намного возрастает по сравнению с обычным планом.

В оптимальном годовом рационе крупного рогатого скота, полученном в результате решения задачи, содержится следующее количество кормов (в центнерах кормовых единиц): концентрированные корма — 6,36, грубые корма — 11,12, сочные корма — 15,94, корнеплоды — 3,19, зеленые корма — 27.

За год на одну структурную голову расходуется 63,61 ц кормовых единиц. Концентраты занимают 10%, грубые — 17,48, сочные — 25,06, корнеплоды — 5,01 и зеленые корма — 42,45%.

Рационы для всех видов животных и птицы полностью удовлетворяют зоотехническим требованиям. Они сбалансированы по переваримому протеину, кальцию, фосфору и каротину.

В задаче для свиней и овец было введено по два варианта рациона. Лучшим из них оказался вариант, который содержит 5,84 ц кормовых единиц концентрированных кормов, 0,35 ц сочных, 0,30 ц грубых, 0,96 ц корнеплодов и 0,96 ц кормовых единиц зеленых кормов. По первому варианту рациона надо кормить 39 237 овец, по второму — 13 593.

§ 4. Краткие выводы, методические советы и задание

Данная задача носит комплексный характер, поскольку она охватывает все отрасли. Ее можно отнести к классу задач оптимального планирования структуры производства в хозяйстве. Однако мы ее специально выделили, чтобы показать специфические моменты и более подробно осветить возможности взаимоувязки растениеводческих и животноводческих отраслей. Запись условий изложенной выше задачи представляет определенные трудности, поэтому мы специально не приводили структурную модель, ограничившись лишь матрицей задачи. Для тренировки построения моделей рекомендуем попытаться самостоятельно записать типичные балансовые условия задачи в структурном виде. Но самое основное — надо разобраться с записью условий матрицы задачи, уяснить необходимость постановки подобных задач и их практическую значимость. При изучении порядка заполнения матрицы следует учесть, что показатели столбца «Объем и тип ограничений» для удобства расчета уменьшены на три знака.

Задание 1. Колхоз им. К. Либкнехта Беляевского района Одесской области располагает такими ресурсами: пашня — 1500 га, трудовые ресурсы, всего 203 342 человеко-дня, в том числе в июне — 28 675, в июле — 29 675 человеко-дней; производственные затраты — 704 300 руб. и 2354 машино-смены. Хозяйство закупает 530 ц жмыха. Предусмотрено, что потребности в ресурсах не должны превышать их наличия в колхозе.

Некоторые дополнительные условия:

1. Количество кормов по питательности должно полностью удовлетворять потребности отраслей животноводства.
2. Предусмотрено создать страховые фонды.
3. Предусмотрено полностью засыпать семенные фонды.
4. Запланировано получить зерна товарного не менее 10 050 ц, содержать кур не больше 4550 голов и рабочих лошадей ровно 160 голов.

Требуется найти структуру посевных площадей под кормовыми культурами и сочетание кормов в рационе, которые в целом дали бы возможность произвести колхозу максимальное количество сельскохозяйственной продукции при минимальных затратах на производство кормов.

Для решения такой задачи нужны следующие исходные данные.

1. Урожайность сельскохозяйственных культур.
2. Затраты труда на единицу продукции — всего и в напряженный период.
3. Затраты средств механизации.
4. Производственные затраты (руб.).
5. Продуктивность скота и птицы.
6. Потребность в кормах по видам.
7. Схема зеленого конвейера.

Имея такую информацию о хозяйстве и схему матрицы экономико-математической задачи по планированию кормопроизводства, составьте математическую модель задачи. (Схема матрицы задачи приведена в таблице 98.)

ГЛАВА 10

ОБОСНОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СОСТАВА МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКА И ЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ВИДАМ РАБОТ

§ 1. Постановка задачи оптимального доукомплектования и использования машинно-тракторного парка

Для рационального ведения сельскохозяйственного производства необходимо установить наилучшее соотношение между отдельными типами и марками машин и наиболее эффективный вариант их распределения по видам работ.

Оптимальным следует считать такой вариант машинно-тракторного парка, с помощью которого можно обеспечить выполнение заданного объема работ в установленные агротехнические сроки с соблюдением условий, способствующих повышению плодородия почвы при минимальных суммарных затратах на приобретение техники и проведение работ.

С помощью экономико-математических методов можно определить поэтапный оптимальный план доукомплектования существующего машинно-тракторного парка новыми, более совершенными машинами с целью последовательного завершения комплексной механизации работ.

Таблица 9.8

Схема матрицы экономико-математической задачи по планированию производства кормов в колхозе им. Либкнехта

Основные и дополнительные показатели	Объем производственных ресурсов	Пшеница озимая	Пшеница яровая	Ячмень товарный	Ячмень фуражный	Кукуруза фуражная	Горох фуражный	Овес фуражный	Кукуруза молочно-восковой спелости
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Пашня (га)	1 500	0,032	0,056	0,035	0,035	0,029	0,032	0,037	0,006
Трудовые ресурсы (чел.-дн.)	203 342	0,505	0,881	0,546	0,547	1,313	0,692	0,585	0,142
Затраты техники (маш.-смен)	2 354	0,016	0,024	0,018	0,0175	0,034	0,016	0,016	0,012
Производственные затраты (руб.)	704 300	4,143	6,543	4,440	4,479	8,042	6,177	4,349	0,956
Корма (ц корм. ед.):									
грубые	0	—0,168	—0,186	—0,272	—0,203	—0,261	—0,169	—0,209	0
сочные	0	0	0	0	0	0	0	0	—0,18
зеленые	0	0	0	0	0	0	0	0	0
концентрированные	530	—0,051	—0,060	—0,047	—0,634	—0,934	—0,815	—0,623	0
Многолетние и однолетние травы (га)	171	0	0	0	0	0	0	0	0
Протеин (ц)	328	—0,019	—0,021	—0,019	—0,047	—0,068	—0,159	—0,063	—0,009
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Зерно (ц)	10 050	0,752	0,682	0,666	0	0	0	0	0
Птица (голов)	4 550	0	0	0	0	0	0	0	0
Лошади (голов)	160	0	0	0	0	0	0	0	0
$m+1$	—	5,08	5,00	4,06	0,22	0,12	0,16	0,23	0,05

Продолжение

Основные и дополнительные показатели	Сахарная свекла	Суданская трава на зеленый корм	...	Многолетние травы	Типы кормления крупного рогатого скота			Кормление птиц
	x_9	x_{10}	...	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{30}	x_{31}
Пашня (га)	0,005	0,014	...	0,028	0	0	0	0
Трудовые ресурсы (чел.-дн.)	0,408	0,180	...	0,219	99,51	99,51	99,51	1,446
Затраты техники (маш.-смен)	0,014	0,014	...	0,032	1,261	1,261	1,261	0
Производственные затраты (руб.)	1,825	1,471	...	0,811	872,5	872,5	872,5	10,84
Корма (ц корм. ед.):								
грубые	0	0	...	—0,092	8,269	8,269	13,0	0,015
сочные	—0,234	0	...	0	40,66	34,45	2,067	0,028
зеленые	0	—0,17	...	0	11,03	12,40	24,7	0,017
концентрированные	0	0	...	0	8,958	13,78	29,0	0,37
Многолетние и однолетние травы (га)	0	0	...	0,028	0	0	0	0
Протеин (ц)	—0,011	—0,13	...	—0,093	7,301	7,301	7,301	0,038
...	...	...	...	...	...	...	...	...
Зерно (ц)	0	0	...	0	0	0	0	0
Птица (голов)	0	0	...	0	0	0	0	0
Лошади (голов)	0	0	...	0	0	0	0	0
$m+1$	0,55	0,68	...	1,23	610,3	610,3	610,3	0,96

Система машин для комплексной механизации должна быть основана на оптимальной программе развития всех отраслей сельского хозяйства с учетом природно-экономической специфики и анализа важнейших факторов, влияющих на рост сельскохозяйственного производства.

Для хозяйств проблема оптимального доукомплектования существующего машинно-тракторного парка является актуальной. Решение этой задачи позволит в срок и с наименьшими затратами проводить сельскохозяйственные работы, а значит, непосредственно и положительно будет влиять на рост эффективности производства. Таким образом, необходимо определить, какие машины следует приобрести хозяйству и как распределить работу между имеющимися и закупаемыми машинами, чтобы обеспечить выполнение всех работ в заданные агротехнические сроки с минимальными затратами.

§ 2. Модель задачи

Для построения экономико-математической модели задачи примем следующие обозначения:

i — индекс работ в хозяйстве ($i=1, 2, \ldots, m$);

j — индекс имеющихся машин ($j=1, 2, \ldots, n$);

a_i — объем i-ой работы;

b_{ij} — количество машин j-ого вида, участвующих на i-ых работах;

k — индекс вновь приобретаемых машин ($k \geqslant j$) ($k = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, g$);

x_k — количество машин k-ого вида;

x_{ik} — объем работ i-ого вида, выполняемый на машинах k-ого типа;

α_{ik} — дневная норма выработки k-ого типа машины на i-ой работе;

c_{ik} — стоимость выполнения единицы (га) i-ой работы машинами k-ого типа;

t_i — предельный срок выполнения i-ой работы;

C_k — балансовая стоимость k-ой машины;

T_k — нормативный срок окупаемости k-ой машины;

L — общие минимальные затраты на выполнение всего объема работ и приобретение новых машин (приведенные затраты).

На основании принятых обозначений построим структурную модель задачи:

$$\text{найти } L = \sum_{\kappa=1}^{g} \sum_{i=1}^{m} c_{ik} x_{ik} + \sum_{\kappa=1}^{g} \frac{C_k}{T_k} x_k \to \min$$

при условиях:

$$1) \quad \sum_{\kappa=1}^{g} x_{ik} = a_i$$

(объем всех i-ых работ должен быть выполнен);

$$2) \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ik}}{a_{ik} t_i} \leqslant b_{ij} + x_k$$

(ни в один день количество занятых машин не должно превышать их общего количества, где вместо i подставляют индексы тех работ, которые проводятся параллельно: $b_k = b_j$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ и $b_k = 0$ при $k = n+1$, $n+2, \ldots, g$);

$$3) \quad x_k \text{ и } x_{ik} \geqslant 0$$

(условия неотрицательности переменных).

§ 3. Подготовка информации для решения задачи

Сформулированная выше задача решалась для колхоза «Россия» Брянской области.

Самый напряженный период в году в хозяйстве — период весенне-полевых работ (табл. 10.1).

Основная масса работ должна быть произведена с 1 по 10 мая, что и обусловливает количественный и качественный состав машинно-тракторного парка.

Агротехнические сроки выполнения сельскохозяйственных работ, указанные в таблице 10.1, определялись с учетом природных условий хозяйства, передовых методов обработки почвы, на основе технологических карт.

Состав тракторного парка колхоза «Россия» представлен в таблице 10.2.

Балансовая стоимость одного трактора ДТ-75 — 2400 руб., ДТ-54А — 2160 руб., МТЗ-50 — 2350 руб., ДТ-20 — 1350 руб. Нормативный срок окупаемости одного трактора 10 лет.

Таблица 10.1

Календарный график выполнения сельскохозяйственных работ с 1 по 15 мая

Виды работ	Агротехнические сроки и числа месяца															Объем работ (га)	Продолжительность работ (дней)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
Дискование с внесением аммиачной воды																1100	10
Боронование																1300	12
Пахота																600	14
Посадка картофеля																200	15
Внесение органических и минеральных удобрений																200	15
Посев зерновых и зернобобовых																650	10

Таблица 10.2

Наличие тракторов в колхозе «Россия» (по данным на 1.I.1973 г.) (шт.)

Марки тракторов	Количество физических машин	В пересчете на эталонные
ДТ-75	10	10
ДТ-54А	2	1,72
МТЗ-50	8	4,40
ДТ-20	2	0,54
Всего	22	16,66

Таблица 10.3

Производительность тракторов на сельскохозяйственных работах в колхозе «Россия»

Виды работ	Марки тракторов и их производительность (га) за рабочий день			
	ДТ-75	ДТ-54А	МТЗ-50	ДТ-20
	1	2	3	4
Дискование с внесением аммиачной воды	19	15	12	7
Боронование	66	57	46	17
Пахота	7,0	6,6	4,4	2,0
Посадка картофеля	×	×	5,8	×
Внесение органических и минеральных удобрений	×	×	1,0	×
Посев зерновых и зернобобовых	28	23	15	8

Таблица 10.4

Себестоимость обработки 1 га различными типами тракторов на разных работах

Виды работ	Типы тракторов и себестоимость обработки 1 га (руб.)			
	ДТ-75	ДТ-54А	МТЗ-50	ДТ-20
Дискование с внесением аммиачной воды	0,90	1,10	1,30	2,30
Боронование	0,14	0,18	0,21	0,43
Пахота	2,70	3,50	4,60	7,00
Посадка картофеля	×	×	2,70	×
Внесение органических и минеральных удобрений	×	×	5,85	×
Посев зерновых и зернобобовых	0,35	0,44	0,70	1,20

Производительность каждого типа тракторов за рабочий день на определенном виде работ и себестоимость обработки 1 га приведены в таблицах 10.3 и 10.4.

§ 4. Развернутая модель и результаты решения задачи

На основании построенной модели и в соответствии с исходной информацией развернутая модель задачи запишется так:

найти $L=0{,}90x_{11}+1{,}1x_{12}+1{,}3x_{13}+2{,}3x_{14}+0{,}14x_{21}+$
$+0{,}18x_{22}+0{,}21x_{23}+0{,}43x_{24}+2{,}7x_{31}+3{,}5x_{32}+4{,}6x_{33}+$
$+7{,}0x_{34}+2{,}7x_{43}+5{,}85x_{53}+0{,}35x_{61}+0{,}44x_{62}+0{,}70x_{63}+$
$+1{,}2x_{64}+240x_1+216x_2+235x_3+135x_4\to\min$

при условиях:

$$\begin{aligned}
1)\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1100;\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1300;\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=600;\\
& x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}=650.\\
& x_{43}=200;\\
& x_{53}=200;\\
& x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}=650.
\end{aligned}$$

(условия выполнения каждой из намеченных работ в полном объеме);

$$2)\quad \frac{x_{11}}{19\cdot 10}+\frac{x_{21}}{66\cdot 11}+\frac{x_{31}}{7{,}0\cdot 14}+\frac{x_{61}}{28\cdot 10}\leqslant 10+x_1;$$

$$\frac{x_{12}}{15\cdot 10}+\frac{x_{22}}{57\cdot 11}+\frac{x_{32}}{6{,}6\cdot 14}+\frac{x_{62}}{23\cdot 10}\leqslant 2+x_2;$$

$$\frac{x_{13}}{12\cdot 10}+\frac{x_{23}}{46\cdot 11}+\frac{x_{33}}{4{,}4\cdot 14}+\frac{x_{43}}{5{,}0\cdot 15}+\frac{x_{53}}{1\cdot 15}+\frac{x_{63}}{15\cdot 10}\leqslant$$
$$\leqslant 8+x_3;$$

$$\frac{x_{14}}{7\cdot 10}+\frac{x_{24}}{17\cdot 11}+\frac{x_{34}}{2{,}0\cdot 14}+\frac{x_{64}}{8\cdot 10}\leqslant 2+x_4$$

(условия выполнения всех работ в заданные агротехнические сроки на имеющихся и закупаемых машинах).

$$3)\quad (x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{64},\ x_1\ \ldots,\ x_4)\geqslant 0$$

(условия неотрицательности переменных).

Рассматриваемая задача была решена по программе симплексного метода на ЭВМ «Минск-32». Полученный оптимальный план распределения имеющихся и закупаемых тракторов показан в таблице 10.5.

Таблица 10.5

Результаты решения задачи

Виды работ	Типы тракторов				Объем работ (га)
	ДТ-75	ДТ-54А	МТЗ-50	ДТ-20	
Дискование с внесением аммиачной воды	1100	—	—	—	1100
Боронование	1300	—	—	—	1300
Пахота	600	—	—	—	600
Посадка картофеля	—	—	200	—	200
Внесение органических и минеральных удобрений	—	—	200	—	200
Посев зерновых и зернобобовых	650	—	—	—	650
Наличие машин	10	2	8	2	—
Количество занятых машин	15	—	16	—	—
Необходимо приобрести	5	—	8	—	—

Для выполнения указанных работ в таком объеме хозяйству, как видно из таблицы, надо дополнительно закупить 5 тракторов марки ДТ-75 и 8 тракторов марки МТЗ-50. Затраты при оптимальном варианте проведения всех видов работ составят: $L=0{,}90\cdot1100+0{,}14\cdot\cdot1300+2{,}70\cdot600+650\cdot0{,}35+2{,}70\cdot200+5{,}85\cdot200=900++182+1620+227+540+1170=4729$ (руб.).

Для сравнения можно отметить, что суммарные затраты на проведение такого же объема работ в 1972 г. составили 8321 руб., то есть больше на 3592 руб. Структура тракторного парка в хозяйстве, таким образом, должна иметь следующий вид.

Таблица 10.6

Оптимальный вариант тракторного парка для колхоза «Россия» (шт.)

Марки тракторов	Количество физических машин	В пересчете на эталонные
ДТ-75	15	15
МТЗ-50	16	8,8
Всего	31	23,8

§ 5. Оптимизация использования машинно-тракторного парка в центральном отделении совхоза им. В. И. Ленина Беляевского района Одесской области

Рассмотрим задачу по организации оптимального использования имеющегося парка тракторов и сельскохозяйственных машин на период весенних полевых работ в отделении совхоза им. Ленина Беляевского района Одесской области.

Площадь пашни — 1647 га; имеется 14 тракторов, из них Т-74 — 3, ДТ-54 — 1, МТЗ-5 — 4, МТЗ-2 — 2, Т-40 — 1, ДТ-20 — 1, Т-16 — 1. В отделении имеется достаточное количество сельскохозяйственных орудий для полной загрузки тракторов.

Для построения структурной модели задачи примем следующие обозначения:

j — индекс марки тракторов ($j=1, 2, \ldots, n$);

i — индекс вида работ ($i=1, 2, \ldots, m$);

κ — индекс агросрока ($\kappa=1, 2, \ldots, l$);

W_{ijk} — производительность (га) трактора j-ой марки на выполнение i-го вида работы в κ-й период;

x_{ijk} — количество тракторов j-й марки, необходимое для выполнения i-го вида работы в κ-й период;

B_{ik} — объем i-ой работы (га) в κ-й период;

K_{jk} — общее количество тракторов j-й марки, которое может быть использовано в κ-й период;

P_{ijk} — длительность (машино-смены) выполнения i-й работы трактором j-ой марки в κ-й период;

q_j — общее количество тракторо-смен работы в агротехническом периоде, которое могут выработать тракторы j-й марки;

c_{ijk} — эксплуатационные затраты на производство i-ой работы трактором j-ой марки в κ-й период;

L — минимальные затраты на производство всех видов работ.

На основании принятых обозначений запишем структурную модель задачи.

$$\text{Найти } L=\sum_{j=1}^{n} c_{ijk}x_{ijk}\to\min$$

(минимальные эксплуатационные затраты на все виды работ) при условиях:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} W_{ijk} x_{ijk} \geqslant B_{ik}$$

(объем работ i-ого вида должен быть выполнен).

$$2)\ \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leqslant K_{ik}$$

(ограничение на количество тракторов j-ой марки при их использовании в κ-ый период).

$$3)\ \sum_{j=1}^{n} P_{ijk} x_{ijk} \leqslant q_j$$

(ограничение на агросроки выполнения i-ой работы j-ыми марками тракторов).

$$4)\ x_{ijk} \geqslant 0$$

(условие неотрицательности переменных).

Задача решалась в двух вариантах, расчет выполнялся на ЭВМ «Минск-22» по программе симплексного метода.

Первый вариант задачи имел 38 основных переменных и 35 ограничений.

В результате решения задачи был получен оптимальный план использования машинно-тракторного парка для выполнения всего комплекса весенних полевых работ (табл. 10.7).

Часть тракторов таких марок, как Т-40, МТЗ-2, ДТ-20, не вошли в оптимальный план, так как использование их на работе в данном агротехническом периоде менее эффективно по сравнению с остальными.

Решение задачи предусматривает при одновременном проведении ряда работ наиболее экономичное использование имеющихся в хозяйстве тракторов различных марок на каждой конкретной работе.

Решение задачи во втором варианте предусматривало оптимальное использование имеющегося парка тракторов и сельскохозяйственных орудий на участках с различной длиной гонов.

Производительность тракторов значительно колеблется в зависимости от размеров полей, в связи с чем имеет большое значение определение наиболее целесо-

Таблица 10.7

Оптимальный план использования машинно-тракторного парка в период весенних полевых работ с 15 марта по 10 мая

Виды работ	Общий объем работ (га)	Сроки проведения работ (раб. дни)	Оптимальный план использования машинно-тракторного парка: состав агрегата	объем работы (га)	количество тракторов, необходимых для выполнения работы в установленные сроки
Боронование зяби	1127	3	Т-74. С-18, 24 бор.	720	3
			ДТ-54, С-18, 24 бор.	219	1
			МТЗ-5, С-11, 18 бор.	189	1
Культивация зяби	987	10	Т-74, 2 КП-4	988	2,6
Посев ранних зерновых	150	5	Т-74, 2 СУ-24	63	0,4
			МТЗ-5, СУБ-48	86	0,6
Прикатывание посевов ранних зерновых	150	5	ДТ-54, 3 ЗКВГ-1,4	150	0,7
Предпосевная культивация и культивация паров	977	10	Т-74, 2 КП-4	977	2,3
Посев овощных культур	230	5	МТЗ-5, СКОН-4,2	230	3,5
Прикатывание почвы до начала и после проведения сева (овощей, бахчи, однолетних трав)	627	20	Т-74, 3 ЗКВГ-1,4	627	0,5
Посев однолетних трав	115	5	Т-74, 2 СУ-24	115	0,4
Посев поздних культур квадратно-гнездовым способом	492	10	ДТ-54, 2 квадратно-гнездовые сеялки	158	1
			МТЗ-5, 1 квадратно-гнездовая сеялка	334	2,5
Боронование посевов и всходов	1355	21	Т-74, С-18, 24 бор.	1355	0,8

Таблица 10.8

Оптимальный план использования машинно-тракторного парка в период весенних полевых работ на полях с различной длиной гонов

Виды работ	Общий объем работ (га)	Сроки проведения работ (раб. дни)	Оптимальный план использования машинно-тракторного парка			
			состав агрегата	на площади с длиной гона (м)	объем работы (га)	количество тракторов, необходимых для выполнения работы в установленные сроки
Боронование зяби	1127	3	Т-74, С-18, 24 бор.	400—600	278	1,15
			Т-74, С-18, 24 бор.	600—800	70	0,25
			Т-74, С-18, 24 бор.	Свыше 1 000	455	1,4
			ДТ-54, С-18, 24 бор.	400—600	219	1,0
			МТЗ-5, С-11, 18 бор.	До 400	105	0,6
Культивация зяби	987	10	Т-74, 2 КП-4	400—600	427	1,12
			Т-74, 2 КП-4	600—800	243	0,6
			ДТ-54, 2 КП-4	До 400	105	0,4
			ДТ-54, 2 КП-4	Свыше 1 000	213	0,6
Посев ранних зерновых	150	5	Т-74, 2 СУ-24	400—600	150	0,95
Прикатывание посевов ранних зерновых	150	5	Т-74, 3 ЗКВГ-1,4	400—600	96	0,35
			МТЗ-5, 2 ЗКВГ-1,4	400—600	54	0,36
Предпосевная культивация и культивация паров	977	10	Т-74, 2 КП-4	400—600	197	0,5
			Т-74, 2 КП-4	600—800	375	0,9
			Т-74, 2 КП-4	Свыше 1 000	79	0,2
			ДТ-54, 2 КП-4	До 400	85	0,3
			ДТ-54, 2 КП-4	Свыше 1 000	241	0,7

Посев овощных культур	230	5	МТЗ-5, СКОН-4,2	До 400	25	0,4
			МТЗ-5, СКОН-4,2	400—600	40	0,6
			МТЗ-5, СКОН-4,2	600—800	165	2,5
Прикатывание почвы до начала и после проведения сева (овощей, бахчи, однолетних трав)	627	20	Т-74, 3 ЗКВГ-1,4	400—600	157	0,14
			Т-74, 3 ЗКВГ-1,4	600—800	400	0,35
			ДТ-54, 3 ЗКВГ-1,4	До 400	70	0,1
Посев однолетних трав	115	5	Т-74, 2 СУ-24	400—600	45	0,2
			Т-74, 2 СУ-24	600—800	70	0,25
Посев поздних культур квадратно-гнездовым способом	492	10	ДТ-54, 2 квадратно-гнездовые сеялки	400—600	79	0,5
			ДТ-54, 2 квадратно-гнездовые сеялки	600—800	90	0,4
			МТЗ-5, 1 квадратно-гнездовая сеялка	До 400	60	0,5
			МТЗ-5, 1 квадратно-гнездовая сеялка	400—600	263	2,0
Боронование посевов и всходов	1355	21	Т-74, С-18, 24 бор.	400—600	540	0,3
			Т-74, С-18, 24 бор.	600—800	375	0,2
			Т-74, С-18, 24 бор.	Свыше 1 000	320	0,5
			МТЗ-5, С-11, 18 бор.	До 400	120	1,0

образного распределения тракторов по видам работ на участках с различной длиной гонов.

Задача имела размерность: 98 основных переменных и 55 ограничений. При решении второго варианта задачи оптимальный план распределения машинно-тракторного парка несколько изменился по сравнению с первым вариантом. Он предусматривает выполнение каждой работы на участках с различной длиной гонов теми из имеющихся тракторных агрегатов, которые наиболее эффективны с точки зрения минимизации эксплуатационных затрат на выполнение всего комплекса сельскохозяйственных работ в рассматриваемом агротехническом периоде (табл. 10.8).

§ 6. Краткие выводы, методические советы и задания

Решение задач по расчету оптимальной структуры и использованию машинно-тракторного парка для отдельных хозяйств может дать практические рекомендации по наилучшему составу и использованию имеющейся техники лишь при наличии полной и достоверной исходной информации для постановки указанных задач.

Основой для расчета оптимального состава машинно-тракторного парка должна служить оптимальная производственная программа развития сельскохозяйственного предприятия. Посевные площади, степень механизации производственных процессов, технология возделывания сельскохозяйственных культур обусловливают объем механизированных работ в каждом конкретном хозяйстве.

Коэффициенты матрицы таких задач должны рассчитываться на основе технологических карт, в которых должны быть учтены агротехнические рекомендации по возделыванию сельскохозяйственных культур, достижения науки и передовой опыт хозяйств соответствующего района и зоны.

Для каждой культуры следует определить наилучшие агротехнические сроки выполнения всех технологических операций, необходимо составить календарный план выполнения механизированных работ в течение всего сельскохозяйственного года.

Исходя из наилучшего агрегатирования тракторов и прицепных орудий, надо установить перечень агрегатов по всем технологическим операциям. Целесообразность включения каждой из намеченных машин в оптимальный план будет установлена в процессе решения задачи по оптимизации машинно-тракторного парка для выполнения всего годового объема механизированных работ.

При изучении данной темы необходимо иметь в виду, что существует довольно много моделей для задач оптимизации состава МТП. При всем различии имеющихся моделей общим для них является типичность подготавливаемой исходной информации и наличие основных ограничений, отражаемых в модели. Постановка задачи заключается в том, чтобы отыскать для данного хозяйства (района или какой-либо зоны) оптимальный состав МТП на перспективу. В качестве критерия оптимизации при этом принимается показатель-минимум эксплуатационных затрат либо приведенных затрат, которые включают в себя, кроме эксплуатационных, затраты на приобретение техники с учетом нормативного коэффициента ее окупаемости.

Данную задачу следует составлять только после отыскания оптимальной структуры (специализации) хозяйства и на основании перспективной технологии возделывания сельскохозяйственных культур, которая учитывает новые типы тракторов и сельскохозяйственных машин, соответствующие нормы выработки и затраты труда и денежно-материальных средств на эксплуатацию техники.

Задача доукомплектования машинно-тракторного парка отличается от задачи оптимизации структуры МТП тем, что в ней учитывается существующий парк машин и тракторов. Следовательно, такая задача решается на текущий плановый период. Надо также иметь в виду, что подобные задачи бывают довольно больших размеров, так как в каждом хозяйстве, как правило, имеется много типов тракторов и машин, из которых комплектуются машинно-тракторные агрегаты, выполняющие разнообразные работы в течение почти всего года. Чтобы несколько сократить размеры задачи, следует учитывать лишь наиболее напряженные периоды выполнения сельскохозяйственных работ. Рекомендуем после изучения данной темы попытаться составить несколько ограничений такой задачи и записать их в математической форме по материалам конкретного хозяйства, то есть записать не всю модель, а только фрагмент ее (отдельные условия) вместе с целевой функцией, коэффициенты которой желательно также взять по конкретному хозяйству.

Эти задачи относятся к классу целочисленных задач, поскольку тракторы и машины нельзя дробить. При решении их методами линейного программирования эта проблема может быть разрешена путем корректировки результатов решения, то есть доведения дробных значений до целых.

Задание 1. *Задача 10.1.* Составьте матрицу задачи для определения оптимального состава МТП в хозяйстве, используя данные таблицы 10.9 и 10.10.

Таблица 10.9

Виды работ	Ед. изм.	Объем работ	Агрегаты	Число часов работы агрегата	Производительность агрегата за 1 час работы	Переменные затраты за 1 час работы (руб.)
Уборка капусты	га	15	МТЗ-50+ПОУ-2	50	0,07	5,30
			МТЗ-50+ТН-12	50	0,15	5,90
Транспортировка капусты	т	160	МТЗ-50+1-ПТУ-3,5	50	3,2	1,80
			МТЗ-50+2-ПТС-4М	50	3,4	1,60
Уборка капустного листа	т	40	МТЗ-50+УБД-3	50	0,8	2,10
			МТЗ-50+КИР-1,5	50	0,3	2,15
Подкапывание кочерыг	га	15	Т-16+СНШ-3	50	0,2	1,60

Таблица 10.10

Тракторы и сельхозмашины	Постоянные затраты (руб.)	Тракторы и сельхозмашины	Постоянные затраты (руб.)
ДТ-75	1200	1-ПТУ-3,5	360
МТЗ-50	1180	2-ПТС-4М	370
Т-16	800	УБД-3	340
ПОУ-2	600	КИР-1,5	190
ТН-12	480	СНШ-3	30

Задание 2. *Задача 10.2.* В хозяйстве имеются следующие марки тракторов: С-80, ДТ-54, МТЗ-5, ДТ-24. За два месяца этими тракторами можно выполнить работы в объеме: С-80—3000 га эталонной пахоты, ДТ-54—4200 га, МТЗ-5 — 6000 га и ДТ-24 — 2200 га. В этот же период в хозяйстве надо выполнить следующие работы (га эт. пахоты):

сволакивание соломы	1900
культивация	4200
пахота	5800
сев озимых	2000
боронование	1500

Себестоимость 1 га условной пахоты, выполняемого тракторами на разных работах, задана (табл. 10.11).

Таблица 10.11

Себестоимость 1 га эталонной пахоты (руб.)

Показатели	Марки тракторов			
	С-80	ДТ-54	МТЗ-5	ДТ-24
Сволакивание соломы	—	0,9	0,85	0,75
Культивация	—	1,2	0,9	0,85
Пахота	2,4	2,8	3,5	3,7
Сев	—	—	1,2	0,95
Боронование	0,2	0,27	0,28	0,35

Примечание. Отсутствие показателя себестоимости по некоторым работам означает, что данная марка трактора не выполняет эти работы. Как быть в подобных случаях — смотрите главу 4.

Надо распределить тракторы по указанным видам работ таким образом, чтобы обеспечить минимум расходов на их проведение.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАСЧЕТАХ

ГЛАВА 11

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАСЧЕТАХ

В сельском хозяйстве, где на формирование конечных результатов производства оказывают влияние множество факторов, применение многофакторных математико-статистических моделей может принести большую пользу. Такие модели прежде всего предназначены для описания различного рода причинно-следственных связей, их исследования и рационального регулирования.

Значительно сложнее обстоит дело с определением вида функции (линейная, степенная или какая другая), поскольку заранее обычно бывает неизвестно, как развивается процесс, какова форма проявления причинно-следственных связей. Для определения параметров таких моделей необходимо иметь соответствующую информацию и знать приемы ее обработки. Параметры функции должны быть надежны, отражать тенденцию, отвечать закону больших и средних чисел. Поэтому такие модели называются математико-статистическими.

Класс математико-статистических моделей достаточно широк, но в основном они подразделяются в зависимости от того, какие зависимости описывают и характеризуют.

Теория определения и использования этих моделей достаточно сложна и объемна, поэтому мы ограничимся здесь лишь изложением наиболее общих вопросов.

Основной класс математико-статистических моделей — производственные функции. Перед тем как приступить к их рассмотрению, заметим, что большинство вопросов, касающихся построения и применения производственных функций, относится в равной степени и к другим математико-статистическим моделям.

§ 1. Понятие и назначение производственных функций

Под производственными функциями подразумеваются математико-статистические модели, характеризующие зависимость объема выпускаемой продукции или других результатов производства от уровня важнейших производственных факторов. Они предназначены для макроописания и макроисследования производственных процессов, представляющих результат взаимодействия предметов труда, средств труда и рабочей силы.

Математически производственные функции представляют собой аналитические выражения специфических соотношений между результативным показателем и факторами-аргументами.

Их идея часто иллюстрируется в виде следующей схемы:

Входы → | Производственный процесс | → Выход

Входы в производственный процесс характеризуют процесс вовлечения в него производительных сил, разложенных по факторам. Выход из него характеризует получение некоторого конечного эффекта (валовой, чистой продукции и т. п.).

Геометрически производственные функции интерпретируются как выпуклые кверху гиперповерхности (производственные поверхности в $n+1$-мерном пространстве).

Основная ценность таких моделей, объясняющая их широкое применение в экономических расчетах, заключается в том, что они позволяют в простой и наглядной форме представить сложные производственные закономерности. На их основании можно определять различные величины, необходимые для рационального и высокоэффективного ведения производства.

Исторически производственные функции появились как понятия агротехнической и биологической наук. Однако развивались и применялись они в основном экономистами.

§ 2. Виды и принципы классификации производственных функций

Производственные функции могут различаться и классифицироваться по многим признакам, например, по временному периоду, которому они соответствуют, по виду (математической форме) функции, по территориально-пространственному и производственному аспекту, то есть в зависимости от того, какой продукт, группу продуктов или все производство и в каком пространственном разрезе они описывают.

По временному аспекту производственные функции подразделяются на статические (процесс производства описывается, например, за год по данным группы хозяйств); статико-динамические (процесс производства исследуется по так называемым данным перекрестного обследования, например, за 2—3 года одновременно по ряду хозяйств); динамические (процесс производства описывается за достаточно длительный период, например, за 10, 20 и более лет по данным динамических рядов).

По математической форме такие модели могут подразделяться на алгебраические (линейные, степенные, квадратичные и т. п.), трансцендентные (показательные, логарифмические, тригонометрические и т. п.) и сложные (когда используются комбинации алгебраических и трансцендентных функций).

По территориально-пространственному аспекту они подразделяются на макро-(большие), мезо-(средние) и микро-(малые) модели. Соответственно к макромоделям относятся общегосударственные, общеотраслевые; к мезомоделям — республиканские, зональные, областные; к микромоделям — модели районного, внутрихозяйственного масштаба.

По производственному аспекту производственные функции подразделяются на модели валового продукта (общепродуктовые), функции растениеводства, функции животноводства, функции группы продуктов (зерна, мяса, овощей, фруктов и т. п.), функции отдельных продуктов и процессов (модели производства яиц, урожайности картофеля, молочной продуктивности коров и т. п.).

При исследовании с их помощью производственных сельскохозяйственных процессов прежде всего необходимо уяснить природу процесса, его структуру, организацию, формы проявления и взаимодействия с другими процессами. Основное внимание при этом следует уделить качественному анализу, на основании которого делаются выводы относительно вида функции. Сложность аграрно-экономических процессов, их зависимость от множества факторов, действующих с разной степенью интенсивности и в различном направлении на результаты производства, не позволяет заранее знать, какой моделью, какой функцией целесообразно описывать тот или иной процесс.

Эмпирически доказано, что для получения удовлетворительной модели достаточно проанализировать следующие функции.

1. Линейную функцию: $y=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

2. Функцию Митчерлиха: $y=(1-10^{-cx})(10^{-kx})(10^{c})$, здесь k — «фактор сокращения», соответствующий чрезмерному увеличению величины x.

3. Функцию Спилмана: $y=M-AP^{x}$,

где M — максимальная величина результативного показателя, достигаемая в результате увеличения фактора x,

A — постоянная величина, определяющая максимальную отзывчивость (сумму предельных производительностей), полученную в результате применения фактора x,

P — коэффициент, определяющий степень уменьшения предельной производительности при том же количестве фактора x.

4. Квадратичную функцию:

$$y=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i x_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k$$

5. Функцию с квадратными корнями:

$$y=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i\sqrt{x_i}+\sum_{i=1}^{n} b_i x_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k$$

6. Функцию Кобба-Дугласа:

$$y=a_0\prod_{i=1}^{n} x_1 a_i$$

7. Трансцендентную (иногда ее называют кинематической или кинетической) функцию

$$y=a_0\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} e^{-\gamma_i x_i}.$$

Во всех функциях (1—7) (a_0, a_i, c_i, b_i, c_{ik}, γ_i — значения расчетных параметров, e — основание натурального логарифма, (x_i, x_k) — значение факторов-аргументов.

Линейная, Кобба-Дугласа и кинетическая функции являются наиболее универсальными.

Модели Митчерлиха и Спилмана могут использоваться для изучения зависимости урожайности от изменения доз внесения удобрений и продуктивности животных от питательности кормов. Квадратичная функция и функция с квадратными корнями хотя и дает хорошее приближение к эмпирическому материалу, но по сравнению с остальными функциями громоздки, а их параметры (a_i, b_i, c_{ik}) экономически труднообъяснимы.

Наибольшей популярностью как в отечественных, так и в зарубежных исследованиях пользуется функция Кобба-Дугласа, считающаяся классической. Ее положительные качества заключаются в компактности, относительно небольшом количестве расчетных параметров, в удобности интерпретации a_i как коэффициентов эластичности, в возможности рассчитывать вторые производные и исследовать функцию на экстремум. Кроме того, функцию Кобба-Дугласа путем логарифмирования можно свести к линейной, облегчив тем самым определение ее параметров.

На основании исследования параметров производственных функций можно определять различные величины, необходимые для высокоэффективного ведения производства. Так, первая производная $\left(\frac{dy}{dx_i}\right)$ функции по аргументу характеризует дополнительный продукт (предельную производительность, предельную отдачу или отзывчивость) этого фактора. Изменение функции (результата) в процентном отношении относительно затрат показывает коэффициенты частной эластичности $\left(Эx_i=\frac{dy}{dx_i}\cdot\frac{x_i}{y}\cdot 100\%\right)$. Сумма коэффициентов частной эластичности $\left(\sum_{i=1}^{n} Эx_i\right)$ показывает общую эффективность производства. Если $\sum_{i=1}^{n} Эx_i > 1$ — эффективность возрастающая, если $\sum_{i=1}^{n} Эx_i = 1$ — эффективность постоянная, а если $\sum_{i=1}^{n} Эx_i < 1$ — эффективность производства падающая. Соотношение первых производных двух факторов $\left(\frac{dy}{dx_i} / \frac{dy}{dx_{i+1}}\right)$ характеризует их степень заменяемости относительно предельного влияния на результат и т. д.

§ 3. Построение производственных функций

Рассмотрим несколько примеров определения и применения производственных функций в сельскохозяйственных расчетах. Для избежания громоздких расчетов количество данных в приводимых примерах ограничено, что при других условиях могло бы отрицательно сказаться на точности результатов и надежности выводов.

Задача 11. 1. Имеются данные по 20 колхозам Березовского района Одесской области об урожайности зерновых культур и количестве внесенного навоза на гектар пашни. Требуется определить производственную функцию «урожай—удобрение» и вычислить ее основные статистические характеристики.

Исходная информация и порядок определения параметров производственной функции показаны в таблице 11.1.

Экономический анализ позволяет предположить, что в данных условиях между урожайностью зерновых культур и количеством внесенного навоза на гектар пашни имеется близкая к линейной зависимость вида $y = a_0 + a_1x_1$,

где y — урожайность (ц с 1 га);
x_1 — количество навоза, внесенного на гектар пашни (т);
a_0, a_1 — параметры функции.

Для нахождения значений параметров a_0 и a_1 необходимо решить так называемую систему линейных нормальных уравнений, которая имеет вид:

$$a_0n + a_1\sum x = \sum y;$$
$$a_0\sum x + a_1\sum x^2 = \sum xy. \qquad (I)$$

Таблица 11.1

Исходная информация и расчетные величины для определения параметров производственной функции

№ хозяйств	Исходные данные и их обозначение		Расчетные величины			Выравненные уровни урожайности
	урожайность (ц/га)	внесено навоза на 1 га пашни (т)	y^2	x^2	yx	y_x
	y	x				
1	13,8	5,0	190,44	25,00	69,00	14,207
2	14,0	5,5	196,00	30,25	77,00	14,735
3	14,3	5,6	204,49	31,36	80,08	14,841
4	14,8	6,5	219,04	42,25	96,20	15,791
5	15,1	7,0	228,01	49,00	105,70	16,319
6	15,6	8,0	243,36	64,00	124,80	17,375
7	15,8	7,0	249,64	49,00	110,60	16,319
8	16,1	7,3	259,21	53,29	117,53	16,636
9	16,4	6,5	268,96	42,25	106,60	15,791
10	16,6	7,5	275,56	56,25	124,50	16,847
11	16,8	8,3	282,24	68,89	139,44	17,692
12	17,0	8,5	289,00	72,25	144,50	17,903
13	17,2	6,0	295,84	36,00	103,20	15,263
14	17,6	7,5	309,76	56,25	132,00	16,847
15	17,9	8,5	320,41	72,25	152,15	17,903
16	18,1	6,0	327,61	36,00	108,60	15,263
17	18,3	8,0	334,89	64,00	146,40	17,375
18	19,5	9,5	380,25	90,25	185,25	18,959
19	20,3	10,0	412,09	100,00	203,00	19,487
20	20,8	10,9	432,64	118,81	226,72	20,437
Σ	336,0	149,1	5719,44	1157,35	2553,27	335,9
$\frac{\Sigma}{n}$	$\overline{y}=$ 16,8	$\overline{x}=$ 7,455	$\overline{y^2}=$ 285,972	$\overline{x^2}=$ 57,8675	$\overline{yx}=$ 126,6635	

Расчетные величины, необходимые для решения этой системы уравнений, приведены в таблице 11.1. Подставив их в систему уравнений (I), получим:

$$\begin{aligned} 20a_0+149{,}1a_1&=336{,}0; \\ 149{,}1a_0+1157{,}35a_1&=1553{,}27. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Разделив каждый член обоих уравнений системы (II) на коэффициенты при a_0, получим:

$$\begin{aligned} a_0+7{,}455a_1&=16{,}8; \\ a_0+7{,}76224a_1&=17{,}1245. \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

Вычитаем из первого уравнения системы (III) второе и находим значение параметра a_1: $-0{,}30724a_1=$ $=-0{,}3245$; $a_1=1{,}056$.

Подставив в одно из уравнений системы (III) полученное значение a_1, найдём значение a_0:

$$a_0=16{,}8-7{,}455\times1{,}056=8{,}927.$$

Подставляя полученные значения параметров (a_0 и a_1) в уравнение связи ($y=a_0+a_1x_1$), получим искомую функцию урожайности:

$$y_x=8{,}927+1{,}056x.$$

Параметр a_1 в нашей производственной функции показывает, насколько увеличится урожайность, если внесение удобрений увеличить на 1 т, то есть с увеличением внесения навоза на 1 т урожайность увеличится на 1,056 ц. Отсюда можно делать соответствующие выводы об экономической целесообразности увеличения внесения органических удобрений в данных условиях с точки зрения затрат и результатов.

С помощью такой модели можно решить задачу относительно возможного уровня урожайности при соответствующем уровне внесения удобрений.

Например, спрашивается, какая будет наиболее вероятная урожайность в одном из колхозов района (в таблице 11.1 пусть это будет колхоз под номером 19), если определено, что при прочих равных условиях хозяйство может увеличить внесение навоза с 10 до 15 т на 1 га посева.

Решение задачи в этом случае сводится к тому, что в модель вместо a_1 вводится конкретное число — 15, после чего производятся элементарные расчеты, то есть $y_x=8{,}927+1{,}056\cdot15=24{,}767$.

Таким образом, при внесении 15 т навоза на 1 га посева урожайность в хозяйстве следует ожидать при прочих равных условиях на уровне 25 ц/га.

После определения вида производственной функции и значения ее параметров возникает вопрос — насколько правильно отражает данная функция исследуемую зависимость и как тесно связан результативный показатель (y) с факторами (фактором), обусловливающими его уровень. На оба эти вопроса может дать ответ величина коэффициента множественной корреляции (корреляционного отношения или индекса корреляции). Есть несколько формул определения этого показателя. Для зависимости вида $y=f(x)$ мы воспользуемся наиболее общей формулой:

$$R=\frac{\overline{yx}-\overline{y}\cdot\overline{x}}{\sigma_y\cdot\sigma_x},$$

где $\overline{y}$ — среднее значение результативного показателя;

$\overline{x}$ — среднее значение фактора;

$\overline{yx}$ — среднее произведение значений результативного показателя на уровень фактора — ковариация;

$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(y-\overline{y})^2}{n}}$ — стандартное (среднее квадратичное) отклонение, или стандартная ошибка y-ка;

$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{n}}$ — стандартное (среднее квадратичное) отклонение, или стандартная ошибка x-са;

n — число наблюдений в совокупности.

В нашей задаче

$$R=\frac{126{,}6635-16{,}8\cdot 74\,556}{1{,}51\cdot 1{,}932}=0{,}8259\approx 0{,}83.$$

Поскольку $R\approx 0{,}83$, то можно утверждать, что данная функция достаточно хорошо описывает исследуемую зависимость, и связь между y и x достаточно высокая.

Заметим, что значение коэффициента корреляции всегда должно находиться в пределах: $-1\leqslant R\leqslant 1$. Значение R^2 принято называть коэффициентом детерминации:

$$0\leqslant R^2\leqslant 1.$$

Чем ближе к единице значение R^2, тем зависимость между исследуемыми факторами теснее. Статистическая значимость R оценивается по следующей формуле:

$$t_R=\frac{R}{\sigma_R}.$$

В нашем примере

$$t_R = \frac{0,83}{0,0696} = 11,9.$$

Сравнение расчетного значения $t_R=11,9$ с соответствующим табулированным значением t при заранее установленной доверительной вероятности показывает, что в данном случае значение коэффициента корреляции статистически значимо.

Больший интерес представляют производственные функции, в которых исследуется зависимость результативного признака не от одного, а от двух и более факторов. В этом случае определение параметров функции и соответствующих статистических характеристик усложняется. Покажем на упрощенном примере определение функции вида $y=f(x_1, x_2)$.

Задача 12. 2. По 12 колхозам Белгород-Днестровского района Одесской области собраны данные об урожайности кукурузы на зерно (y), затратах удобрений на 1 га ее посева (x_1) и стоимости семян (x_2).

Требуется определить производственную функцию, характеризующую зависимость урожайности кукурузы от указанных факторов, и вычислить показатели тесноты связи y-ка с обоими x-ами.

Выразим связь между результативным признаком y и факторными признаками x_1 и x_2 степенным уравнением вида (6), а для нахождения параметров этого уравнения путем логарифмирования приведем его к линейному виду.

Для вычисления параметров производственной функции используем данные таблицы 11.2.

Параметры искомого уравнения находим путем решения системы нормальных уравнений, используя идею метода наименьших квадратов.

$$\begin{aligned} \Sigma z &= na'_0 + a_1\Sigma u_1 + a_2\Sigma u_2; \\ \Sigma u_1 z &= a'_0\Sigma u_1 + a_1\Sigma u^2_1 + a_2\Sigma u_1 u_2; \\ \Sigma u_2 z &= a'_0\Sigma u_2 + a_1\Sigma u_1 u_2 + a_2\Sigma u^2_2. \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

Подставляя в систему (IV) данные таблицы 11.2, получим:

$$\begin{aligned} 12a'_0 + 8,196a_1 + 7,8003a_2 &= 18,6096; \\ 8,1965a'_0 + 6,0676a_1 + 5,5304a_2 &= 12,9178; \\ 7,8003a'_0 + 5,5304a_1 + 5,3468a_2 &= 12,2162. \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

Таблица 11.2

Исходная информация и расчетные величины для определения параметров производственной функции, характеризующей зависимость урожайности кукурузы на зерно от затрат на удобрения и семена (в расчете на 1 га ее посева)

№ хозяйств	Исходные данные и их обозначение			Расчетные величины								
	урожайность (ц/га) y	затраты на удобрения (руб/га) x_1	затраты на семена (руб/га) x_2	$z=\lg y$	$u_1=\lg x_1$	$u_2=\lg x_2$	$u_1 z$	$u_2 z$	$u_1 u_2$	z^2	u_1^2	u_2^2
1	34,1	4,1	2,7	1,4928	0,6128	0,4314	0,9148	0,6440	0,2644	2,229	0,3745	0,1811
2	40,0	6,2	5,4	1,6021	0,7924	0,7324	1,2695	1,1734	0,5804	2,567	0,6279	0,364
3	38,2	5,6	5,8	1,5821	0,7482	0,7634	1,1837	1,2078	0,5712	2,502	0,5598	0,5828
4	42,1	6,1	5,9	1,6243	0,7853	0,7709	1,2756	1,2522	0,6053	2,637	0,6167	0,5943
5	30,0	4,3	2,4	1,4771	0,6335	0,3802	0,3357	0,5616	0,2409	2,181	0,4013	0,1446
6	37,2	5,3	5,6	1,5705	0,7243	0,7482	1,1375	1,1750	0,5419	2,466	0,5246	0,5598
7	34,0	4,5	4,0	1,5315	0,6532	0,6021	1,004	0,9281	0,3933	2,345	0,4267	0,3625
8	43,2	7,0	5,2	1,6355	0,8451	0,7160	1,3822	1,1710	0,6051	2,673	0,7142	0,5127
9	22,3	1,4	4,0	1,3483	0,1461	0,6021	0,1970	0,8118	0,0880	1,818	0,0214	0,3625
10	42,4	7,0	7,1	1,6274	0,8451	0,8513	1,3753	1,3854	0,7194	2,648	0,7142	0,7247
11	28,1	3,1	2,7	1,4487	0,4914	0,4314	0,7119	0,6250	0,2120	2,100	0,2415	0,1861
12	46,7	2,3	5,9	1,6693	0,9191	0,7709	1,5342	1,2869	0,7085	2,787	0,8448	0,5943
Σ	435,3	62,9	56,7	18,6097	8,1965	7,8003	12,9178	12,2162	5,5304	28,953	6,0676	5,3468
$\frac{\Sigma}{n}$	$\bar{y}=36,3$	$\bar{x}_1=5,24$	$\bar{x}_2=4,7$	$\bar{z}=1,5508$	$\bar{u}_1=0,683$	$\bar{u}_2=0,650$	$\overline{u_1 z}=1,0765$	$\overline{u_2 z}=1,018$	$\overline{u_1 u_2}=0,4609$	$\overline{z^2}=2,4127$	$\overline{u_1^2}=0,5056$	$\overline{u_2^2}=0,4456$

Поделив каждое уравнение системы ($У$) на коэффициент при a_0, получим:

$$\begin{aligned} a_0+0{,}6830a_1+0{,}6500a_2&=1{,}5508;\\ a_0+0{,}7402a_1+0{,}6747a_2&=1{,}5760;\\ a_0+0{,}7090a_1+0{,}6855a_2&=1{,}5661.\end{aligned} \qquad \text{(VI)}$$

Вычитаем из второго уравнения системы (VI) первое, а затем третье:

$$\begin{aligned} 0{,}0572a_1+0{,}0247a_2&=0{,}0252;\\ 0{,}0312a_1-0{,}0108a_2&=0{,}0099.\end{aligned} \qquad \text{(VII)}$$

Поделим первое и второе уравнение системы (VII) соответственно на 0,0572 и 0,0312:

$$\begin{aligned} a_1+0{,}4318a_2&=0{,}4406;\\ a_1-0{,}3462a_2&=0{,}3173.\end{aligned} \qquad \text{(VIII)}$$

Вычитая из первого уравнения системы (VIII) второе, получим

$$0{,}778a_2=0{,}1233, \text{ или } a_2=0{,}1585.$$

Тогда $a_1=0{,}3173+0{,}3462\cdot 0{,}1585=0{,}372$ и $a_0=1{,}5508-0{,}6830\cdot 0{,}372-0{,}65\cdot 0{,}158=1{,}1940$. Так как $a_0'=\lg a_0$, то, потенцируя, находим: $a_0=15{,}63$. Подставляя найденные значения a_0, a_1, a_2 в уравнение (VI), получим искомую производственную функцию:

$$y=15{,}63x_1^{0{,}372}\cdot x_2^{0{,}1585}.$$

Рассчитываем коэффициент множественной корреляции, предварительно определив парные коэффициенты корреляции:

$$Z_{u_1z}=\frac{\overline{u_1z}-\overline{u_1}\,\overline{z}}{\sigma_{u_1}\cdot\sigma_z}=\frac{1{,}0765-0{,}683\cdot 1{,}5508}{0{,}1977\cdot 0{,}0878}=0{,}994;$$

$$Z_{u_2z}=\frac{\overline{u_2z}-\overline{u_2}\,\overline{z}}{\sigma_{u_2}\cdot\sigma_z}=\frac{1{,}0180-0{,}65\cdot 1{,}5508}{0{,}152\cdot 0{,}0878}=0{,}752;$$

$$Z_{u_1u_2}=\frac{\overline{u_1u_2}-\overline{u_1}\,\overline{u_2}}{\sigma_{u_1}\cdot\sigma_{u_2}}=\frac{0{,}4609-0{,}6830\cdot 0{,}65}{0{,}152\cdot 0{,}1977}=0{,}563.$$

Тогда

$$\eta=\sqrt{\frac{0{,}994^2+0{,}752^2\cdot 0{,}944\cdot 0{,}752\cdot 0{,}563}{1-0{,}563^2}}=0{,}902.$$

Теперь определим среднюю квадратичную ошибку корреляционного отношения:

$$\sigma_\eta = \frac{1-\eta^2}{\sqrt{N-n-1}} = \frac{1-0,902^2}{\sqrt{12-2-1}} = 0,0621.$$

Существенность множественного корреляционного отношения определяется значением t-критерия:

$$t_\eta = \frac{0,902}{0,0621} = 14,5.$$

Так как расчетное значение t-критерия значительно превосходит табулированное, то можно утверждать, что связь между урожайностью и затратами на удобрение и семена существенная и достаточно тесная.

§ 4. Функции издержек производства

Снижение издержек производства в расчете на единицу продукции — одна из наиболее важных задач. Известно, что от уровня производственных затрат непосредственно зависят показатели сельскохозяйственного производства. Будучи базой цены и основой для расчета прибыли и рентабельности, себестоимость продукции выступает в качестве определяющего показателя эффективности производства и темпов расширенного воспроизводства.

Величина себестоимости продукции есть функция множества организационно-хозяйственных — регулируемых и случайных — факторов. Этим в значительной степени объясняются трудности в обосновании ее уровня и определении резервов снижения затрат. При изучении себестоимости продукции и ее обоснования на перспективу могут использоваться различные методы. Одними из наиболее эффективных являются методы математико-статистического моделирования, которые позволяют, например, оценить, насколько величина себестоимости зависит от конкретного фактора или от группы факторов, насколько изменение одного фактора способствует снижению или увеличению ее уровня. С их помощью можно выявлять тенденции и закономерности изменения себестоимости, определить минимально возможную величину производственных затрат. Такие модели принято называть функциями издержек.

В теории моделирования экономических процессов вопросы построения функции издержек разработаны недостаточно. Даже при изучении зависимости уровня затрат от размеров производства, его концентрации или интенсификации не разработано удовлетворительных рекомендаций относительно формы (вида) парной связи.

Величина себестоимости (как единицы продукции, так и всей продукции) математически может быть выражена в виде некоторой функции от ряда факторов-аргументов. Факторы, определяющие величину себестоимости, могут быть дифференцированы по группам, например, так: факторы внешнего происхождения (количество осадков, среднегодовая или среднемесячная температура воздуха и т. п.); факторы внутреннего происхождения, зависящие от хозяйственной политики (уровень специализации, фондонасыщенность, электровооруженность и т. п.); смешанные факторы, зависящие как от технологии и организации производства, так и от случайных явлений. Подобная дифференциация способствует правильной оценке степени влияния на уровень себестоимости различных факторов, помогает сориентироваться в возможностях снижения затрат при данном уровне технологии и организации производства, позволяет разработать рекомендации относительно путей снижения затрат.

Идея представления уровня себестоимости продукции в виде функции от факторов-аргументов нашла свое отражение в ряде экспериментальных и практических расчетов как в нашей стране, так и за рубежом. В специальной зарубежной литературе под функциями издержек подразумеваются модели, описывающие соотношение между уровнем издержек на производство какого-либо одного продукта или массы продуктов и произведенным количеством этого продукта [1]. Но такое толкование функции издержек, введенное западными специалистами, предполагает использование лишь однофакторных моделей вида: $y=f(x)$, где y — величина издержек производства, x — объем производства.

Правильнее под функциями издержек подразумевать многофакторные модели. Выбор математической формы конкретной функции издержек представляет из-

---

[1] См., например, Г. Тинтнер. Введение в эконометрию. М., «Статистика», 1965, с. 106.

вестную проблему. Теоретически возможно рассмотреть широкий класс функций для нахождения наиболее правильной модели, однако практически это делать нецелесообразно, поскольку в данном случае затраты на исследование возрастают и могут превысить предполагаемый эффект от применения моделирования. Для нахождения удовлетворительной функции издержек можно использовать зависимости вида (1), (6) и (7), то есть соответственно линейные, степенные и трансцендентные функции.

При описании зависимости величины себестоимости продукции от уровня концентрации масштабов производства, степени его специализации или интенсификации производства наиболее обоснованы гиперболические зависимости вида:

$$y=a+bx^{-1} \ (8), \quad y^2=x^2-a^2 \ (9), \quad y=\frac{a^2}{2x} \qquad (10)$$

или зависимости дробно-линейного характера, например вида:

$$y=\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}. \qquad (11)$$

Такие модели отражают тенденцию постепенного снижения уровня себестоимости в расчете на единицу продукции при увеличении масштабов производства при условии, что это увеличение идет не экстенсивным путем. В противном случае возможно временное увеличение издержек производства при увеличении его масштаба. В этом случае могут быть использованы показательные и логарифмические функции вида:

$$y=e^{-(ax)^2} \ (12), \quad y=ae^{bx+cx^2} \ (13), \quad y=ax^{b}e^{cx}. \qquad (14)$$

Функции такого рода позволяют обнаружить «точку перегиба», то есть отразить момент — на какой стадии издержки производства возрастали с ростом масштаба производства и до какого предела. Такие формы зависимости следует использовать в том случае, когда от вложенных затрат или от реорганизации производства нельзя ожидать немедленного эффекта, но который по истечении некоторого времени определенно придет.

В анализе, прогнозировании, планировании и управлении сельскохозяйственным производством (на любом уровне) важно знать не только, как изменится уровень затрат в зависимости от увеличения или снижения уровня производства по каким-то причинам, но и уметь быстро рассчитать возможные изменения в объеме производства от снижения или увеличения уровня затрат. Кроме этого, весьма важно уметь определять оптимальный уровень затрат и, своевременно регулируя уровень производства, добиваться того, чтобы изменение объемов производства не сказалось отрицательно на уровне затрат.

В этом случае модели издержек производства могут быть весьма полезны. На их основе можно определить как оптимальные уровни затрат, так и решать обратную задачу, то есть следить за возможным изменением в масштабе производства в соответствии с вариацией уровня затрат.

Таким образом, на основании анализа моделей (функций) издержек производства можно решать следующие задачи:

1. Следить за изменением уровня затрат от изменения масштабов производства.
2. Определять уровни предельных затрат в абсолютном выражении или в процентах.
3. Определять оптимальный уровень затрат.
4. Определять вероятный масштаб производства при фиксированном уровне затрат.

Первая задача решается путем подстановки в функцию издержек значений уровня объемов производства и проведения обычных элементарных расчетов.

Для решения второй задачи следует определить значение первой производной затрат по объему производства, то есть найти $\frac{dy}{dx}$ для конкретной функции затрат, после чего в значение производной вместо аргумента подставляется соответствующее его значение.

Для моделей (8—14) значение предельных уровней затрат и коэффициентов эластичности соответственно определяется по формулам:

для модели (8): $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{x^2}$, а $Э_x=-\frac{by}{x^3}$;

для модели (9): $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, а $Э_x=\frac{y}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

для модели (10): $\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2}{2x^2}$, а $Э_x=-\frac{a^2y}{2x^3}$;

для модели (11): $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{(a_2x+b_2)^2}$, а $Э_x=\frac{y(a_1b_2-a_2b_1)}{x(a_2x+b_2)^2}$;

для модели (12): $\frac{dy}{dx}=-2a^2xe^{-(ax)^2}$, а $Э_x=-2a^2ye^{-(ax)^2}$;

для модели (13): $\frac{dy}{dx}=a(b+2cx)e^{bx+cx^2}$, а $Э_x=$

$$=\frac{ya(b+2cx)e^{bx+cx^2}}{x};$$

для модели (14): $\frac{dy}{dx} ae^{cx}x^{b-1}(b+xc)$, а $Э_x=$

$$=\frac{yae^{cx}x^{b-1}(b+xc)}{x}.$$

Решение третьей задачи (определение оптимального уровня затрат) достигается в соответствии с классическими методами оптимизации — путем исследования функции на экстремум.

Решение четвертой задачи (определение масштаба производства при фиксированном уровне затрат) достигается на основе разрешения функций издержек относительно аргумента и подстановки в это уравнение значения уровня затрат.

В экономике и организации сельскохозяйственного производства модели вида (12—14) могут применяться, например, при исследовании уровня затрат от резкого увеличения масштабов производства за счет, скажем, укрупнения хозяйства или при анализе объема затрат в расчете на одну голову скота при увеличении стада.

Часто возникает необходимость определения удельных затрат на ту или иную продукцию в зависимости от изменения урожайности или продуктивности скота. Большинство таких зависимостей описываются моделью вида $y=a+bx^{-1}$ (8), которая обычно записывается так:

$$y=a+\frac{b}{x}.$$

Такие модели можно рассчитывать по сгруппированным данным в разрезе районов, областей, зон и т. п. Они позволяют ориентироваться в средних темпах изменения одного показателя в зависимости от изменения другого. Подобная идея нашла свое непосредственное отражение в методических рекомендациях по планированию сельского хозяйства РСФСР, изданных Госпланом РСФСР в 1973 г.

Для применения таких моделей во внутрихозяйственных расчетах требуется проанализировать и обработать динамический ряд себестоимости и урожайности или продуктивности скота за ряд лет. Это необходимо потому, что по данным одного хозяйства нельзя построить группировку. Построенная в этом случае динамическая модель позволяет следить за тенденцией зависимости между этими показателями и на основании уровня одного фактора делать предположения о возможной величине другого. Аналогичные расчеты можно получать на уровне района, области, края, АССР и т. д.

При изучении зависимости себестоимости продукции от факторов, обусловливающих неравномерность производственных процессов, целесообразно использовать тригонометрические функции, которые позволяют отражать сезонные колебания. Приведенные выше формы зависимости могут быть использованы и для определения тренда себестоимости. В этом случае величина себестоимости рассматривается как функция времени, то есть $y=f(t)$, где y — величина себестоимости, t — фактор времени.

При построении функций издержек можно использовать принцип структурного подхода, то есть значения факторов-аргументов можно задавать в структурной (в долях или в процентах) форме. Такие модели представляют интерес в том случае, когда исследуется зависимость уровня издержек производства от структуры производимой продукции, экспликации земельных угодий, структуры стада, уровня обеспеченности хозяйств и структуры рабочей силы, структуры основных производственных и оборотных фондов и т. п.

Принципы работы с моделями издержек производства аналогичны тем, которые применяются при анализе производственных функций. Разделив совокупные издержки на объем произведенной продукции, мы получим величину средних издержек. Взяв первую производную $\left(\frac{dy}{dx_i}\right)$, получим представление о величине предельных издержек. Исследовав функцию на экстремум, можно определить оптимальный уровень издержек и т. д.

Таблица 11.3

Статические функции издержек в совхозах МСХ РСФСР

Продукты	Число наблюдений (областей)	Корреляционное отношение	Уравнения регрессии	Себестоимость (руб/ц)		Отклонение расчетной от фактической	
				фактическая	расчетная	руб.	%
Зернобобовые (без кукурузы)	68	0,40	$y = 3{,}494 + \frac{39{,}715}{x}$	5,03	6,49	+1,46	+29,0
Рис	10	0,71	$y = 0{,}099 + \frac{509{,}234}{x}$	14,80	17,00	+2,20	+14,9
Картофель	71	0,66	$y = -1{,}762 + \frac{810{,}027}{x}$	6,80	9,10	+2,30	+33,8
Молоко	71	0,63	$y = 19{,}327 - \frac{1770{,}492}{x}$	16,86	18,51	+1,65	+ 9,8

Исторически функции издержек стали использоваться значительно позже, чем функции производства. Поэтому основные положения их теории, практики построения и применения целиком опираются на теорию, практику расчета и применения производственных функций.

Приведем ряд конкретных моделей, характеризующих зависимость себестоимости единицы продукции от уровня урожайности сельскохозяйственных культур и продуктивности животных. Результаты получены на базе статистической обработки данных по совхозам МСХ РСФСР на ЭВМ «Минск-22».

Параметры моделей рассчитывались по усредненным (среднеобластным) нормативам, поэтому их статистическую надежность нельзя признать достаточной. Кроме того, поскольку расчеты проводились по однотипной модели вида (8), то в ряде случаев значение корреляционного отношения оказалось слишком мало. Однако, несмотря на это, полученные характеристики представляют некоторый интерес, особенно с точки зрения сравнения рассчитанных по модели значений уровня себестоимости с фактическими (табл. 11.3).

Расчеты показывают, что модели вида (8) неплохо описывают зависимость подобного рода. Имея конкретные параметры модели и зная примерную величину отклонения расчетных значений от фактических, легко сориентироваться в ожидаемом уровне затрат.

Конечно, использовать в таких расчетах статистические функции следует осторожно, поскольку они не улавливают изменений во времени. Поэтому в подобных случаях надо рассчитывать динамические модели. Примером таких моделей являются функции издержек, построенные по среднереспубликанским данным за период с 1961 по 1967 г. по ряду животноводческих продуктов (табл. 11.4).

Различная форма моделей объясняется тем, что типовые модели не всегда дают достаточно хорошие результаты. В данном же случае этого удалось добиться. Как показали расчеты, большинство моделей дает удовлетворительное приближение расчетных значений уровней себестоимости к фактическим (см. табл. 11.5). Разумеется, нельзя полагать, что путем механической экстраполяции можно получить перспективные уровни затрат и с большой степенью точности утверждать, что

Таблица 11.4

Динамические функции издержек для продуктов животноводства за 1961—1967 гг.

Виды продукции	Количество наблюдений (лет)	Коэффициент корреляции (корреляционное отношение)	Уравнение	Примечание
Молоко	7	0,41	$y=84{,}582-0{,}065x_1+0{,}0000157x^2_1$	Парабола второго порядка
Привес КРС	7	0,098	$y_{\mathrm{I}}=114{,}06-0{,}0119x_2$	Линейная функция
	7	0,33	$y_{\mathrm{II}}=-37{,}574+0183x_2+\dfrac{28\,407{,}94}{x_2}$	Гипербола вида: $y=a+bx+\dfrac{c}{x}$
Привес свиней	7	0,84	$y_{\mathrm{I}}=50{,}88+\dfrac{19\,627{,}62}{x_3}$	Гипербола вида: $y=a+bx+\dfrac{b}{x}$
		0,87	$y_{\mathrm{II}}=-415{,}99+0{,}854x_3\ \dfrac{81\,400{,}79}{x_3}$	Гипербола вида: $y=a+bx+\dfrac{c}{x}$
Привес овец	7	0,94	$y=-344{,}95+16{,}607x_4-0{,}164\,x^2_4$	Парабола второго порядка
Шерсть	7	0,45	$y=7928{,}31-4713{,}04\,x_5+728{,}203x^2_5$	Парабола второго порядка

где y — уровень себестоимости (руб.); x_1 — надой на 1 корову (кг/год), x_2 — среднесуточный привес КРС (г); x_3 — среднесуточный привес свиней (г); x_4 — среднесуточный привес овец (г); x_5 — настриг шерсти от одной овцы (кг).

Таблица 11.5

Сравнение рассчитанных по модели значений уровня себестоимости продукции с фактическими (руб/ц)

Виды продукции	1961 г.			1962 г.			1963 г.		
	фактическая	расчетная	отклонение (+, −)	фактическая	расчетная	отклонение (+, −)	фактическая	расчетная	отклонение (+, −)
Молоко	14,49	17,30	+ 2,81	16,01	17,56	+1,55	17,03	18,43	+1,40
Привес КРС									
I вариант	95,70	110,24	+14,44	102,20	110,22	+8,02	119,60	110,75	−8,85
II »		109,66	+13,96		109,66	+7,46		115,49	−4,11
Привес свиней									
I вариант	124,4	131,99	+ 7,59	128,9	134,05	+5,15	151,6	143,46	−8,14
II »		127,05	+ 2,65		137,94	+9,04		149,03	−2,57
Привес овец	65,2	65,91	+ 0,71	65,2	66,56	+1,36	70,3	68,81	−1,49
Шерсть	310,3	303,38	− 6,92	310,3	315,92	+5,62	322.2	315,92	−6,28

Продолжение

Виды продукции	1964 г.			1965 г.			1966 г.			1967 г.		
	фактическая	расчетная	отклонение (+, −)	фактическая	расчетная	отклонение (+, −)	фактическая	расчетная	отклонение (+, −)	фактическая	расчетная	отклонение (+, −)
Молоко	18,30	17,66	− 0,64	16,60	17,48	+ 0,88	16,92	17,46	+ 0,54	16,86	18,27	+ 1,41
Привес КРС												
I вариант	119,0	110,24	− 8,76	109,4	108,13	− 1,27	112,5	109,80	− 2,70	110,7	109,59	−1,11
II »		109,66	− 9,34		110,61	+ 1,21		107,29	− 5,21		106,79	− 3,91
Привес свиней												
I вариант	128,3	112,22	−16,08	109,2	110,00	+ 0,80	108,2	111,84	+ 3,64	103,9	111,09	+ 7,19
II »		111,67	−16,63		112,75	+ 3,55		111,79	+ 3,59		115,99	+12,09
Привес овец	76,6	75,40	− 1,20	73,5	75,03	+ 1,53	73,5	65,15	− 8,35	−73,2	71,95	− 1,25
Шерсть	341,1	315,92	−25,18	335,2	322,00	−13,23	42,8	305,41	−37,39	340,5	353,16	+12,66

эти уровни наиболее обоснованны. В перспективе возможны любые отклонения. Все зависит от того, как и какие факторы будут влиять на уровень затрат, какова будет технология и организация производства, степень вооруженности труда и т. п. При этом, естественно, экстраполяционные расчеты не должны подменять калькуляционных, а лишь дополнять их. В тех же случаях, когда не представляется возможным провести примерную калькуляцию, ориентировочные нормативы уровней затрат можно получить на базе динамических функций издержек.

Воспользуемся представленными в таблице 11.4 функциями издержек для расчета предельных издержек по конкретным продуктам и оптимальных норм затрат при их производстве.

Функция себестоимости молока имеет вид параболы второго порядка. Предельная норма издержек есть первая производная $-\frac{dy}{dx}$, которая в данном случае равна: $(-0{,}065+2\cdot 0{,}0000157\cdot x_1)$. С учетом того, что значение второго слагаемого $(2\cdot 0{,}0000157\cdot x_1)$ относительно мало, можно считать, что значение предельных издержек составляет минус 0,065. Иными словами, увеличение величины среднегодовых удоев молока в расчете на одну корову на 1 кг в среднем сопровождалось снижением себестоимости центнера молока на 6,5 коп.

Оптимальный уровень затрат на производство молока с точки зрения данной модели рассчитывается путем приравнивания первой производной нулю, то есть:

$$-0{,}065+2\cdot 0{,}0000157x_1=0.$$

Решив это уравнение, найдем, что

$$x_1=\frac{0{,}065}{2\cdot 0{,}0000157}\approx 2007.$$

Таким образом, оптимальный уровень издержек на производство молока в среднем за 1961—1967 гг. в совхозах МСХ РСФСР был тогда, когда уровень среднегодовых удоев в расчете на одну корову составлял порядка 2007 кг. Конкретное оптимальное значение уровня затрат в расчете на 1 ц молока получится в том случае, когда в функцию издержек вместо x подставить 2007 кг. Проделав такие расчеты, получим: $y=84{,}582-0{,}065\cdot$ $\cdot 2007+0{,}0000157\cdot 2007^2\approx 84{,}582-130{,}455+63{,}27\approx 17{,}4$.

Иными словами, в среднем за рассматриваемый период и по исследуемой совокупности оптимальный уровень себестоимости 1 ц молока составлял примерно 17,4 руб.

Аналогично можно рассчитать предельные издержки и их оптимальный уровень по другим продуктам, по которым ранее получены функции издержек. Расчеты эти приводятся в таблице 11.6.

Таблица 11.6

Предельные нормы издержек, оптимальные уровни продуктивности и затрат *

Виды продукции	$y'=\left(\frac{dy}{dx}\right)$	Оптимальное значение продуктивности ($x_{опт}$)	Оптимальные уровни издержек ($y_{опт}$)
Привес КРС	$y'=0{,}183-\frac{28407{,}9}{x^2}$	394,0	106,6
Привес свиней	$y'=0{,}854-\frac{81400{,}8}{x^2}$	310,1	111,3
Привес овец	$y'=16{,}6-0{,}328\,x$	50,6	75,5
Шерсть	$y'=-4713{,}0+1456{,}4x$	3,24	302,7

* Предельные нормы издержек, оптимальные уровни продуктивности и затрат для привеса крупного рогатого скота и привеса свиней рассчитывались по моделям вида: $y=a+bx+\frac{c}{x}$.

Рассчитанные на основании моделей издержек характеристики могут использоваться в различного рода расчетах. В частности, они могут применяться для разработки общей оптимальной программы функционирования сельскохозяйственного производства. В этом случае частные и общие функции издержек можно корректировать и увязывать со всей производственно-финансовой программой сельхозпредприятий.

§ 5. Краткие выводы, методические советы и задания

Теория построения и применения математико-статистических моделей в планово-экономических расчетах довольно сложна. Поэтому при изучении вопросов этой главы следует изучить соответствующие разделы учебных пособий по математической статистике. Следует разобраться с такими понятиями, как корреляционная связь, уравнение регрессии, эмпирическая и теоретическая линия регрессии. Особенно важно усвоить назначение и смысл метода наименьших квадратов, поскольку идея этого метода положена в основу определения наиболее правильной функции и ее параметров. Весьма полезно повторить соответствующие разделы математического анализа с тем, чтобы вспомнить, как надо исследовать функции на экстремум, как определять и интерпретировать производные первого и второго порядка. Необходимо научиться их рассчитывать и четко представлять возможности их применения для конкретных планово-экономических расчетов.

Задание 1. *Задача 1.* Имеются данные по 10 совхозам областного мясо-молочного треста относительно удоев молока, затрат кормов и затрат труда (табл. 11.7). Постройте модель продуктивности (линейного вида), определите коэффициент множественной корреляции, предельную отдачу кормов и затрат живого труда и рассчитайте коэффициенты эластичности для обоих факторов.

Таблица 11.7

Исходные данные для задачи 1

Показатели	Номера совхозов				
	1	2	3	4	5
Среднегодовой удой молока от одной коровы (кг)	2800	2900	2100	2700	1850
Расход кормов на одну корову (ц корм. ед.)	34,0	36,0	28,0	33,0	29,0
Затраты труда в расчете на одну корову (чел.-час.)	20,0	18,0	22,0	18,0	24,0

Продолжение

Показатели	Номера совхозов				
	6	7	8	9	10
Среднегодовой удой молока от одной коровы (кг)	1920	2200	2800	3200	4200
Расход кормов на одну корову (ц корм. ед.)	32,0	32,0	36,0	35,0	38,0
Затраты труда в расчете на одну корову (чел.-час.)	25,0	20,0	16,0	15,0	16,0

Задача 2. Имеются данные об урожайности озимой пшеницы, внесении органических и минеральных удобрений по 10 хозяйствам района (табл. 11.8). Постройте

производственную функцию урожайности, определите предельную отдачу удобрений, степень зависимости урожайности от этих факторов и докажите, какие удобрения в наибольшей степени способствуют росту урожайности.

Таблица 11.8

Исходные данные для задачи 2

Показатели	Номера хозяйств									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Урожайность (ц/га)	30	40	25	38	42	35	40	28	34	36
Внесение органических удобрений (т/га)	10	14	8	16	16	15	15	12	14	13
Внесение минеральных удобрений (ц д.в./га)	6	7	5	6	8	9	8	5	6	7

Задание 2. *Задача 1.* Зависимость выхода валовой продукции в хозяйствах области от двух основных факторов имеет вид:

$$y = -0{,}03 + 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2,$$

где y — стоимость валовой продукции в расчете на 1 га сельхозугодий (тыс. руб.);
x_1 — среднегодовая стоимость всех средств в расчете на 1 га сельхозугодий (тыс. руб.);
x_2 — среднегодовая численность работников в расчете на 1 га сельхозугодий (человек).

Требуется:

а) определить окупаемость основных средств в хозяйствах области;

б) определить, сколько хозяйству потребуется иметь средств при условии, что стоимость валовой продукции должна составить 400 руб. на 1 га сельхозугодий, а численность работников — 0,1 чел. на 1 га сельхозугодий;

в) обосновать, сколько можно высвободить работников, если обеспеченность хозяйств средствами в среднем увеличится с 0,3 тыс. руб. до 0,4 тыс. руб. в расчете на 1 га сельхозугодий;

г) рассчитать, какой следует ожидать выход продукции, если значение факторов составит: $x_1 = 0{,}35$, а $x_2 = 0{,}06$.

Задача 2. Производственная функция выхода валовой продукции в хозяйствах области имеет вид: $y=0{,}01\ x_1^{0{,}8}\ x_2^{0{,}3}$, где y, x_1 и x_2 означают те же факторы, что и в задаче 1 этого задания.

Требуется:

а) определить предельную отдачу факторов x_1 и x_2;

б) определить коэффициенты эластичности и масштаб эффективности производства;

в) определить уровень взаимозаменяемости факторов x_1 и x_2 при условии, что с ростом фондовооруженности количество работников должно сокращаться;

г) определить значение y, если $x_1=0{,}3$, а $x_2=0{,}1$.

Задание 3. *Задача 1.* Имеются данные относительно урожайности яровой пшеницы в хозяйстве и ее себестоимости за последние 12 лет (табл. 11.9). Определите зависимость между этими показателями и постройте соответствующую модель.

Таблица 11.9

Исходные данные к задаче 1

Показатели	Годы											
	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
Урожайность (ц/га)	18	19	18	20	25	27	26	30	32	34	38	36
Себестоимость (руб/ц)	8	7,5	7,2	7,0	6,5	6,0	5,4	5,0	4,8	4,6	4,0	4,2

Задача 2. Исходя из решения задачи 1 этого задания, необходимо: а) определить возможную себестоимость 1 ц пшеницы, если ожидаемая урожайность ее в 1976 г. по прогнозу специалистов должна составить 43 ц/га;

б) определить, насколько следует ожидать снижения себестоимости, если урожайность в 1975 г. составит 40 ц/га.

Задача 3. Зависимость себестоимости 1 тыс. яиц от яйценоскости кур-несушек в среднем в хозяйствах Птицепрома РСФСР описывается моделью:

$$y=4{,}5+\frac{628{,}0}{x},$$

где y — себестоимость 1 тыс. яиц (руб.);

x — яйценоскость (яиц в год) кур-несушек.

Требуется:

а) определить, насколько снизится себестоимость 1 тыс. яиц (руб.), если яйценоскость курицы-несушки увеличится в среднем по Птицепрому с 220 до 280 яиц в год;

б) определить предельную норму снижения затрат при увеличении яйценоскости в среднем на одно яйцо.

ГЛАВА 12
МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Общая идея всех методов сетевого планирования и управления заключается в графическом построении плана в виде сети с временными, стоимостными или другими оценками работ для заблаговременного планирования действий, приводящих в итоге к желаемому результату. Математической основой сетевых графиков является теория графов, основанная на топологических принципах и теории множеств.

§ 1. Понятие о системах и методах сетевого планирования

Термин сетевая модель (сетевой график, логическая сеть) основывается на понятии ориентированного графа. Граф как математическое понятие есть некоторое множество точек, соединенных прямыми или кривыми линиями. Область графа, ограниченная несколькими точками (вершинами), некоторые из которых не имеют входящих или выходящих из них дуг, носит название сети. Сеть, моделирующая определенный процесс, называется сетевой моделью данного процесса, при этом ориентация дуг графа осуществляется в соответствии с логикой этого процесса.

Теория графов, начало которой было положено Эйлером в 1736 г., развивалась совершенно независимо от сетевого планирования. Сетевые графики были изобретены только в 1958 г. Они представляют собой направленные графы, то есть такие, которые не содержат циклов, имеют вершину, в которую не входит ни одна дуга, и вершину, из которой не выходит ни одна дуга.

За рубежом наиболее широкое применение получили системы планирования и управления класса «Pert».

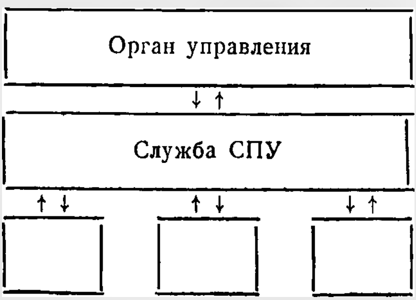
Термин Pert происходит от английского выражения, обозначающего метод обзора и оценки программ.

В СССР системы сетевого планирования и управления начали применять с 1962 г. при организации и планировании ряда разработок.

Важной особенностью применения методов СПУ является системный подход к организации управления, согласно которому коллективы исполнителей, относящиеся зачастую к различным организациям, но принимающие участие в разработке, рассматриваются как звенья единой организационной системы. Эти коллективы исполнителей в системе СПУ представляют собой объекты управления, то есть управляемый орган. Орган управления в системе СПУ представлен коллективом руководителей разработки (проекта), отвечающих за выполнение в срок полного объема работ. Кроме управляемого и управляющего органов, в системе СПУ должен быть орган запоминания и преобразования информации, так называемая служба СПУ, которая является рабочим органом. Структура системы СПУ показана на рисунке 3.

Структура системы СПУ обусловлена необходимостью выполнения основных процессов управления: получения информации, формирования команд управления и исполнения команд управления.

Для отображения процесса выполнения разработки (проекта) в системах СПУ используется графическая модель (сетевой график), в которой весь проект расчленяется на отдельные, четко определенные работы.



Коллективы исполнителей

Рис. 3. Структура системы СПУ.

Сетевой график отражает логическую взаимосвязь и параметры всех работ проекта.

Использование сетевого графика в качестве модели проекта позволяет:

четко отобразить структуру проекта, выявить с любой степенью детализации работы проекта и установить их взаимосвязь;

четко определить объем работы каждого исполнителя или коллектива исполнителей и сроки ее выполнения;

составить обоснованный план выполнения проекта, поскольку при построении модели проекта используются опыт и знания специалистов, принимающих непосредственное участие в проекте и хорошо знакомых с решаемыми задачами;

осуществить обоснованное прогнозирование критических работ и сконцентрировать внимание руководителей на их выполнении;

более эффективно по заданному критерию использовать ресурсы;

проводить многовариантный анализ различных решений по изменению технологической последовательности работ, распределению ресурсов и т. д. с целью улучшения плана;

использовать для обработки большого количества информации современные средства вычислительной техники, оперативно выдавать данные о фактическом состоянии проекта, а также осуществлять непрерывное планирование работ путем корректировки планов с учетом возникших изменений.

В основе решения перечисленного круга задач лежат правила построения сетевой модели проекта и методы анализа сетевой модели с целью получения параметров работ — времени их начала и окончания, потребности в ресурсах, резервов времени и т. д.

Существуют различные методы анализа сетевых моделей, ориентированных на ручной или машинный счет, детерминированную или вероятностную модель, детерминированные или вероятностные оценки необходимого времени выполнения работ, учитывающие или не учитывающие потребности в ресурсах (одного или нескольких видов). В настоящее время насчитывается около 100 различных методов анализа сетевых графиков.

Наличие большого количества систем сетевого планирования и управления вызывает необходимость их классификации. В основу разделения систем на группы берутся факторы, оказывающие существенное влияние на основные принципы их построения и функционирования. Выделяются системы СПУ для больших, средних и малых разработок в зависимости от масштаба комплекса операций, являющегося объектом управления. По объему сети можно подразделить на сети большого объема, где насчитывается свыше 10 тыс. работ, сети среднего объема — от 1,5 до 10 тыс. работ и сети малого объема — до 1,5 тыс. работ.

По параметрам управления системы СПУ классифицируются на системы с контролем сроков; системы с контролем сроков и затрат; системы СПУ с контролем сроков, затрат и технических характеристик выполняемой программы; системы с наличием ограничений по ресурсам и без учета ограничений по ресурсам.

§ 2. Правила построения сетевых моделей и разновидности сетей

Сетевая модель может быть изображена в виде сетевого графика (сети), состоящего из стрелок и кружков (или квадратов, прямоугольников и т. д.).

Пример сетевого графика приведен на рис. 4.

Стрелками в сети изображаются отдельные работы. Понятие «работа» используется в широком смысле и может иметь следующие значения:

а) действительная работа или просто работа — трудовой процесс, требующий затрат времени и ресурсов, например: рабочее проектирование какого-либо узла, расчет кинематической схемы этого узла и т. д.;

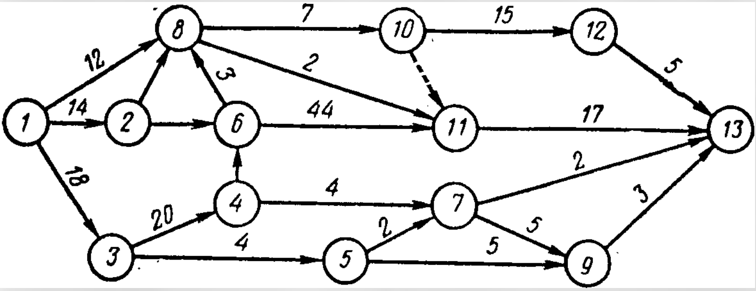


Рис. 4.

б) ожидание — процесс, требующий затрат времени, но не требующий затрат ресурсов (например, процесс твердения бетона в строительстве);

в) фиктивная работа (зависимость) — изображение логической связи между работами. Фиктивная работа не связана с расходом времени и ресурсов. Фиктивная работа изображается пунктирной стрелкой (на рис. 4 работа 10—11).

Кружками в сети изображаются события. Понятие «событие» может иметь следующие значения:

а) исходное событие — начало выполнения проекта. Исходное событие не имеет предшествующих работ, поэтому в сети в него не входит ни одной работы (на рис. 4 событие 1);

б) завершающее событие — достижение конечной (одной из нескольких) целей проекта. Завершающее событие не имеет следующих за ним работ, поэтому в сети из него не выходит ни одной работы;

в) промежуточное событие, или просто событие — результат одной или совокупный результат нескольких работ, предоставляющий возможность начать одну или несколько непосредственно следующих работ (например, событие 11 символизирует совокупный результат трех работ, изображенных стрелками, входящими в кружок).

Всякая работа сетевого графика соединяет два события: непосредственно предшествующее данной работе (являющееся для нее начальным событием) и следующее за ней (являющееся для нее конечным событием).

Всем событиям присваивается определенный номер (цифровой код). Таким образом, всякая работа сети может быть закодирована номерами ее начального и конечного события. Например, работы на рисунке 4 обозначаются так: (1,8), (2,8) и т. д.

Продолжительность выполнения работы измеряется в единицах времени (часах, днях, неделях и т. д.). Работа может иметь и другие количественные оценки, характеризующие трудоемкость, стоимость, материальные ресурсы, необходимые для ее выполнения. Каждая работа должна иметь определение, раскрывающее ее содержание.

В отличие от работы событие не является процессом и не имеет продолжительности. Наступление собы-

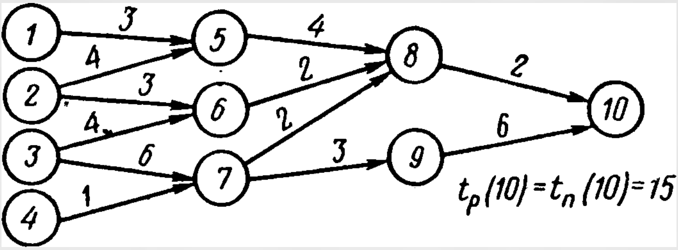


Рис. 5.

тия соответствует моменту окончания последней из работ, непосредственно предшествующей данному событию. Событие не может наступить, пока не закончатся все предшествующие ему работы. Целесообразно некоторым событиям сети давать определения.

В сети существует исходное и одно или несколько завершающих событий. Сети, имеющие одно завершающее событие, называются одноцелевыми (рис. 5); сети, имеющие несколько завершающих событий, называются многоцелевыми (рис. 6).

Определение исходного события представляет собой формулировку условий для начала работ по выполнению данного проекта. Определение завершающего события представляет собой формулировку конечной цели данного проекта.

Любая последовательность работ в сети, в которой конечное событие каждой работы этой последовательности совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется путем.

Путь, начало которого совпадает с исходным событием, а конец с завершающим событием сети, называется полным путем и обозначается буквой L.

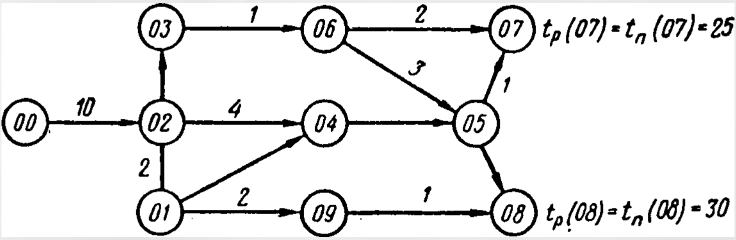


Рис. 6.

Путь от исходного события до данного события сети называется путем, предшествующим данному событию, а путь соединяющий это событие с завершающим событием — путем, следующим за данным событием.

Путь, соединяющий какие-либо два события i и j, из которых ни одно не является исходным или завершающим, называется путем между событиями i и j.

Если известна продолжительность каждой работы $t\ (i,\ j)$, то для каждого пути может быть определена его продолжительность $t\ (L)$. Продолжительность любого пути равна сумме продолжительностей составляющих его работ. Например, на рисунке 4 продолжительность пути $L=1—8—10—11—13=12+7+0+17==36$ дней, а пути $L=1—3—4—7—13=18+20+4+2==44$ дня.

Путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется критическим и обозначается $L_{кр}$. В рассматриваемом примере критическим является путь $L==1—3—4—6—11—13$, имеющий продолжительность 107 дней.

Продолжительность критического пути обозначается $T_{кр}$. В сети может быть несколько критических путей.

Понятие критического пути имеет чрезвычайно большое значение в системах СПУ. Продолжительность критического пути определяет общую продолжительность выполнения проекта в целом. Следовательно, чтобы сократить сроки выполнения проекта, необходимо сократить сроки выполнения работ, находящихся на критическом пути.

Одной из главных задач управления является изыскание методов сокращения продолжительности работ, находящихся на критическом пути, особо тщательный контроль за соблюдением установленных сроков выполнения именно этих работ и принятие оперативных мер по предотвращению их срыва.

Возможность в наглядной форме представить именно ту последовательность работ, которая определяет общие сроки выполнения проекта, выгодно отличает сетевые графики от графиков других типов. Это особенно важно при реализации сложных проектов.

При построении сетевых графиков необходимо учитывать следующие правила:

а) каждая работа должна быть заключена между двумя событиями, при этом нельзя допускать различ-

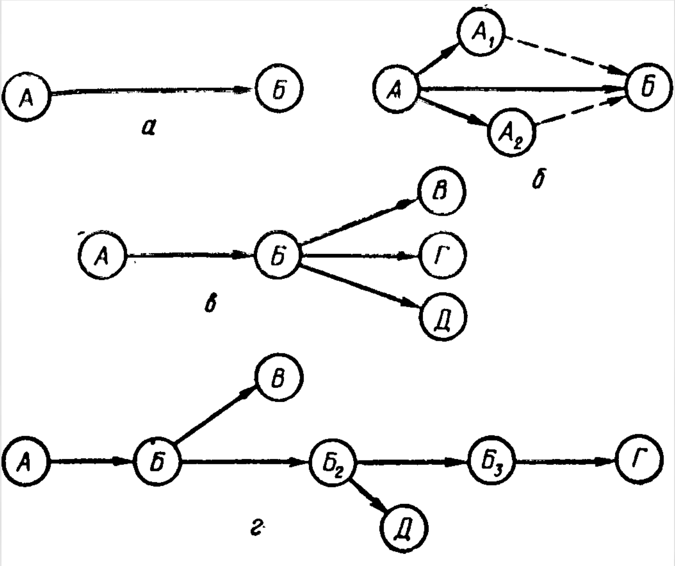


Рис. 7.

ных работ, имеющих одинаковые коды, то есть работ с общим начальным и конечным событиями (рис. 7, *а*). В подобных случаях в сеть должны быть введены дополнительные события и фиктивные работы так, как показано на рисунке 7, *б*. Если некоторые работы, например БВ и БД на рисунке 7, *в*, могут быть начаты после выполнения части работы *АБ*, то целесообразно расчленять работу *АБ* на части и процесс изображать, как показано на рисунке 7, *г*.

Сетевая модель может иметь детерминированную, случайную или смешанную структуру. Детерминированная структура означает, что все работы проекта и их взаимосвязь точно определены. Если все работы проекта включены в сеть с некоторой вероятностью, то структура сетевой модели будет случайной. В такой сети каждой работе проекта соответствует определенная вероятность включения ее в число выполняемых работ, причем эти вероятности могут быть зависимы.

При смешанной структуре наличие некоторых работ в сети проекта определено с некоторой вероятностью, остальные же работы входят в сеть постоянно.

В сети проекта оценки продолжительности работ могут быть либо все детерминированными, либо вероятностными, либо для одних работ — детерминированными, а для других — вероятностными.

Сети с детерминированной структурой и детерминированными оценками продолжительности работ называются детерминированными, сети с детерминированной структурой и вероятностными временными оценками называются вероятностными.

Основными временными параметрами сетей являются ранние и поздние сроки наступления событий. Зная их, можно вычислить остальные параметры сети — сроки начала и окончания работ и резервы времени, событий и работ.

Ранний срок наступления события $t_р(i)$ равен наибольшей из продолжительностей путей, предшествующих событию i; поздний срок наступления событий $t_п(i)$ равен разности между $T_{кр}$ и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием. Для событий, принадлежащих критическому пути, $t_р(i)=t_п(i)$, так как сумма максимальных продолжительностей предшествующего и последующего путей для таких событий дает продолжительность критического пути.

Зная $t_р(i)$ и $t_п(i)$ для всех событий сети, можно определить для любой работы (i, j) следующие параметры: ранний срок начала работы $t_{рн}(i, j)=t_р(i)$; поздний срок начала работы $t_{пн}(i, j)=t_п(j)-t(i, j)$; ранний срок окончания работы $t_{ро}(i, j)=t_р(i)+t(i, j)$; поздний срок окончания работы $t_{по}(i, j)=t_п(j)$.

Для всех работ критического пути: $t_{рн}(i, j)=t_{пн}(i, j)$; $t_{ро}(i, j)=t_{по}(i, j)$, так как для всех событий этого пути $t_р(i)=t_п(i)$.

Разность между продолжительностью $T_{кр}$ и продолжительностью $t(L)$ пути называется резервом времени пути L и обозначается $R(L)$. $R(L)=T_{кр}-t(L)$. $R(L)$ показывает предельно допустимое увеличение продолжительности пути L.

Для работы сетевой модели имеются два основных резерва времени — полный и свободный.

Полный резерв времени $R_п(i, j)$ равен разности между поздним сроком наступления события j и ранним сроком наступления события i за вычетом продолжительности работы (i, j):

$$R_п(i, j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i, j).$$

Полный резерв времени работы показывает, насколько может быть увеличена продолжительность отдельной работы или отсрочено ее начало, чтобы продолжительность проходящего через нее максимального пути не превысила продолжительности критического пути. Использование этого резерва полностью на одной из работ аннулирует полные резервы всех работ, лежащих на этом (максимальном) пути.

Полный резерв времени работ критического пути равен нулю, а для остальных работ он положителен, то есть $R_п(i, j) \geqslant 0$.

В некоторых случаях целесообразно выделять работы, полные резервы времени которых меньше заданной величины. Такие работы образуют так называемую критическую зону сети.

Свободный резерв времени работы $R_с\ (i, j)$ равен разности между ранними сроками наступления событий j и i за вычетом продолжительности работы (i, j):

$$R_с(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i, j).$$

Свободный резерв времени работы определяет величину резервов времени работ сети, образующихся в том случае, если в качестве плановых сроков начала выполнения всех работ приняты ранние сроки наступления событий. Он указывает максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность отдельной работы или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала последующих работ при условии, что непосредственно предшествующее событие наступило в свой ранний срок. Свободный резерв времени является в этом смысле независимым резервом, так как использование его на одной из работ не меняет величины свободных резервов остальных работ сети.

Все события в сети, за исключением событий, принадлежащих критическому пути, имеют резервы времени. Резерв времени наступления события обозначается $R(i)$ и определяется как разность между поздним и ранним сроками наступления данного события:

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i).$$

Резерв времени наступления события показывает, на какой предельно допустимый срок можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения проекта.

Для событий критического пути $R(i)=0$, так как для таких событий $t_р(i)=t_п(i)$.

В случае задания для проекта директивного срока T разность $\Delta=T_д-T_{кр}$ определяет в зависимости от знака Δ либо дефицит времени сети при $\Delta<0$, либо резерв сети при $\Delta>0$ по отношению к $T_д$.

Сеть, для которой $\Delta=0$, то есть $T_д=T_{кр}$, называется приведенной.

Если сеть не является приведенной, то есть $T_д-T_{кр}=\Delta\neq0$, то поздние сроки наступления событий, резервы времени событий и полные резервы времени работ находятся путем прибавления величины Δ к значениям, полученным по соответствующим формулам: $t'_п(i)=t_п(i)+\Delta$; $R'_п(i, j)=R_п(i, j)+\Delta$; $R'(i)=R(i)+\Delta$.

Если директивный срок $T_д$ меньше продолжительности критического пути $T_{кр}$, то есть $\Delta<0$, то в сети существуют события и работы с отрицательными резервами времени.

Они принадлежат путям, продолжительность которых превышает директивный срок.

В многоцелевых сетях критические пути, сроки начала и окончания работ, резервы времени и другие показатели рассчитываются относительно каждого из завершающих событий, причем резервы времени работ и событий принимаются наименьшие.

Для определения параметров вероятностных сетей можно использовать аналитические методы, статистическое моделирование и методы усреднения. Наибольшее распространение получили методы усреднения.

Исходными данными для метода усреднения являются вероятностные оценки продолжительности каждой работы. Используются две (минимальная, или оптимистическая, и максимальная, или пессимистическая) или три (минимальная, максимальная и наиболее вероятная) оценки продолжительности работ. Продолжительности работ на основании вероятностных оценок усредняются и вероятностная сеть рассматривается как детерминированная. Для каждой работы оценивается также дисперсия $\sigma^2(t)$, то есть среднее значение квадрата отклонения продолжительности работ от ее ожидаемого значения. Дополнительно к параметрам, определяемым для детерминированных сетей, при анализе вероятностных сетей вычисляют также оценки дисперсии сроков наступления событий, служащие мерой их возможного разброса, а также вероятности наступления события в плановые (директивные) сроки.

§ 3. Пример построения сетевого графика, расчета и анализа временных параметров работ

Для бригады колхоза им. Ленина Одесской области необходимо составить план работы на посевную кампанию. Требуется провести сев яровых культур на площади в 400 га. Данная площадь разбита на 4 участка по 100 га каждый. На первом поле должно быть посеяно 20 т семян яровой пшеницы, на втором — 20 т ячменя, на третьем — 20 т овса и на четвертом поле — 20 т семян гороха. Работа по подготовке семян, сеялок и пашни должна быть выполнена одновременно. Посев может быть произведен параллельно на разных полях различными машинами. Цель выполнения работ — сдача в срок отчета о посевной кампании по бригаде.

Примем следующие условные обозначения в сетевом графике.

1. Все работы обозначены на графике сплошными стрелками, а условные — пунктирными.

2. Над сплошными стрелками поставлены цифры:

цифры без скобок — продолжительность работы в днях;

первая цифра в скобках — количество агрегатов на механизированных работах или количество людей на немеханизированных работах;

вторая цифра в скобках — количество рабочих на механизированных работах.

В график, который приведен на рисунке 8[1], включены работы, отражающие принципиальные технологические и организационные взаимосвязи, причем кружок, изображающий событие, разделим на 2 сектора. Работы в графике следующие:

создание запаса горючего на складе;

доочистка семян на складе;

[1] Этот график является фрагментом большой сети, составленной совместно с Н. М. Андриановой, И. М. Линецкой, Б. И. Кадышевым.

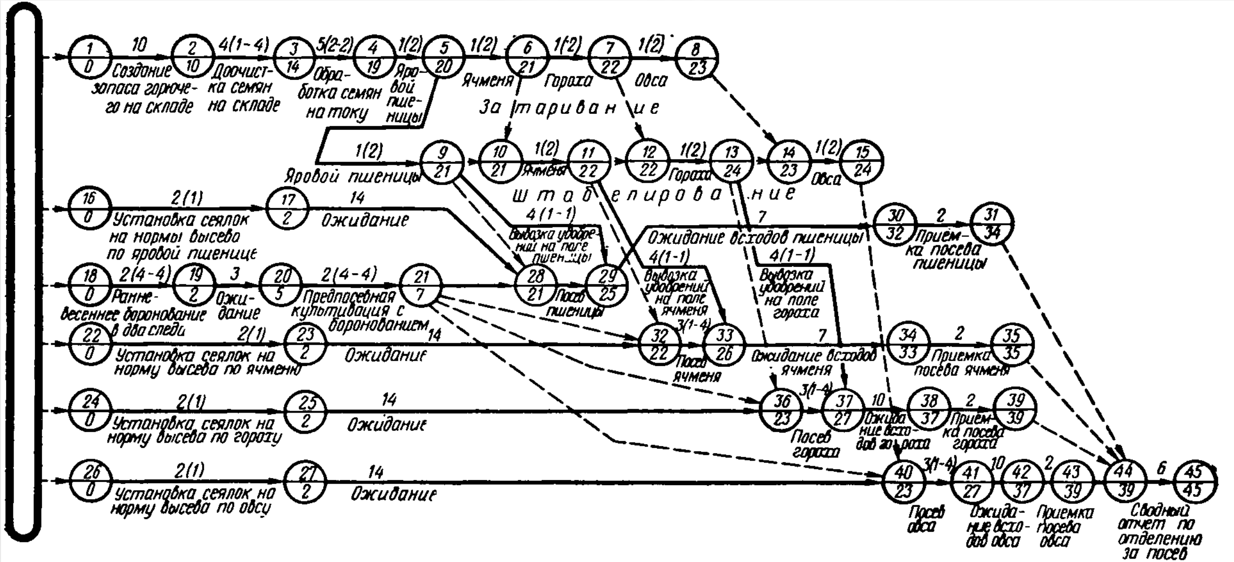


Рис. 8. Сетевой график для бригады на посевную кампанию яровых колосовых культур.

обработка семян на току;
затаривание семян яровой пшеницы;
затаривание семян ячменя;
затаривание семян гороха;
затаривание семян овса;
установка сеялок на нормы высева по яровой пшенице;
ранневесеннее боронование параллельно всех полей разными машинами;
установка сеялок на нормы высева по ячменю;
установка сеялок на нормы высева по гороху;
установка сеялок на нормы высева по овсу;
штабелирование яровой пшеницы;
штабелирование ярового ячменя;
штабелирование ярового гороха;
штабелирование ярового овса;
вывозка удобрений на поля пшеницы;
вывозка удобрений на поля ячменя;
вывозка удобрений на поля гороха;
вывозка удобрений на поля овса;
предпосевная культивация с боронованием всех полей разными машинами;
вывозка семян и заправка сеялок пшеницей;
вывозка семян и заправка сеялок ячменем;
вывозка семян и заправка сеялок горохом;
вывозка семян и заправка сеялок овсом;
приемка посева пшеницы;
приемка посева ячменя;
приемка посева гороха;
приемка посева овса;
составление сводного отчета по бригаде за посев.

При расчете параметров $t_р(i)$ будем следовать алгоритму:

Шаг 1. Для исходного события принимаем $t_р(0)=0$.

Шаг 2. Проверяем, есть ли события, для которых $t_р(i)$ не определено. Если нет, идем к шагу 6; если да — к шагу 3.

Шаг 3. Проверяем, есть ли в графике события, для которых определены ранние сроки свершения всех предшествующих событий. Если нет, идем к шагу 7; если да — к шагу 4.

Шаг 4. Находим $t_р(i)=\max\limits_{к\ni j}\{t_р(к)+t(к,\ i)\}$ для всех i, удовлетворяющих условию шага 3. Здесь $к$ — номера событий, предшествующих (i). Отмечаем каким-либо признаком работу, для которой $t_р(i) = t_р(к) + t(к, i)$. Например, знаком *.

Шаг 5. Переходим к шагу 2.

Шаг 6. Расчет окончен. Ранний срок свершения конечного события отражает продолжительность критического пути $T_{кр}$.

Шаг 7. В графике допущена ошибка построения. Проверить логическую взаимосвязь работ.

Расчет вспомогательного параметра $t_{обр}(i)$ аналогичен вышеприведенному, но производится начиная с конечного события.

Шаг 1. Для конечного события полагаем $t_{обр}$ (кон. событ.) $=0$.

Шаг 2. Проверяем, есть ли события, для которых не определено $t_{обр}(i)$. Если нет, идем к шагу 6; если да — к шагу 3.

Шаг 3. Проверяем, есть ли события, для которых определены $t_{обр}(i)$ всех последующих событий. Если есть, идем к шагу 4; если нет — к шагу 7.

Шаг 4. Вычисляем $t_{обр}(i) = \max\{t_{обр}(j) + t(i, j)\}$. Здесь max берется среди всех j, то есть последующих событий для события i. Шаг 4 выполняется для всех событий i, удовлетворяющих условию шага 3. Отмечаем при этом некоторым знаком работы (i, j), для которых $t_{обр}(i) = t_{обр}(j) + t(i, j)$, например знаком +.

Шаг 5. Переходим к шагу 2.

Шаг 6. Расчет окончен. $t_{обр}(0) = T_{кр}$.

Шаг 7. Ошибка в построении графика.

Пример графика после расчета приведен на рисунке 7. $T_{кр} = 46$ дней. Критический путь находим по знакам отмеченных работ. Он проходит через события 0—1—2—3—4—5—6—7—8—25—26—37 — 42 — 43—44 — 45. На критическом пути лежат и события 20, 21, 22, 23, 24.

Для иллюстрации процесса корректировки графика примем условно период обновления графика (период отчетности) 5 дней. Пусть, например, через 5 дней после начала работ поступила информация:

работа 1—2 выполнена частично. Для ее завершения осталось 5 дней;

работа 9—10 выполнена полностью;

работа 18—19 выполнена частично. Для ее завершения остался 1 день.

Еще через 5 дней поступила информация о следующих работах:

1—2 — выполнена (осталось 0 дней);
11—12 — выполнена (осталось 0 дней);
14—15 — выполнена (осталось 0 дней);
16—17 — выполнена (осталось 0 дней);
18—19 — выполнена (осталось 0 дней);
2—3 — выполнена (осталось 0 дней);
3—4 — частично выполнена (остался 1 день);
10—28 — частично выполнена (осталось 6 дней);
12—13 — выполнена (осталось 0 дней);
13—27 — выполнена (остался 1 день);
15—32 — выполнена (осталось 6 дней);
17—31 — выполнена (осталось 6 дней);
19—36 — выполнена (осталось 6 дней).

После внесения корректив отметим фронт работ и уточним $t_{обр}(i)$ для событий, лежащих на линии фронта работ. Изменение $t_{обр}$ в сторону увеличения говорит об удлинении критического пути, а в сторону уменьшения — о сокращении этого пути. Рассчитывать $t_р(i)$ и $t_п(i)$ всех событий графика нецелесообразно. Достаточно рассчитать $t_р(i)$ только для тех работ, которые должны выполняться в настоящий момент или в ближайшие 5 дней (период обновления информации). Критический путь вполне определяется $t_{обр}(i)$. Если при расчете $t_{обр}(i)$ отмечать, например, символом $+$ путь, соответствующий максимальному пути от конечного события до данного, то, уточнив этот путь в районе фронта работ, мы легко находим цепочку критического пути до конечного события (идти следует по отмеченным $+$ работам). Кроме вышеприведенного метода расчета параметров непосредственно на сети, существует табличный метод ручного счета и метод расчета на ЭВМ. Табличный метод неудобен и поэтому здесь не рассматривается. Методы расчета на ЭВМ связаны с особенностями представления информации в машине и описаны инструкциями к конкретным программам. Кроме того, имеется специализированная машина «Ритм» для расчета и анализа сетевых планов.

§ 4. Принципы функционирования системы СПУ

Системы СПУ являются весьма эффективным средством управления производственной деятельностью. Система СПУ может быть применена для разработок отдельных объектов, новой техники, осуществляемых силами организации или подразделения, с целью обеспечения обоснованного исходного планирования, а также для оперативного контроля за фактическим ходом работ.

С ее помощью можно осуществлять планирование и управление опытно-конструкторскими работами, изготовлением опытных изделий и их испытанием, а также подготовкой серийного производства новых изделий. Она может быть использована для внедрения сетевого планирования и управления на предприятиях в период, когда организации еще не имеют ЭВМ.

Разработка системы СПУ начинается с составления исходного плана. При этом используется только объективная информация. В качестве исходной информации может быть взята техническая документация, технологические карты, нормативы, сведения о наличии производственных ресурсов, сроки выполнения работ и др. От достоверности всей этой информации зависит качество сетевого плана.

В функционировании системы СПУ различают 2 стадии:

стадия планирования, когда модель проекта создается, анализируются различные технологические варианты и уточняется срок окончания работ. Утверждается перечень ответственных исполнителей работ. Составленная модель проекта согласовывается со всеми ответственными исполнителями, утверждается руководством проекта и после этого является директивным документом на весь период выполнения работ;

стадия управления проектом, когда сетевая модель регулярно обновляется по данным ответственных исполнителей, анализируется ситуация по выполнению плана, выявляются критические работы (узкие места), просматриваются различные варианты дальнейшего хода работ и один из вариантов принимается как директивный до поступления очередной информации.

Независимо от стадий функционирования системы СПУ должны соблюдаться следующие принципы функционирования:

1. Планирование должно носить сквозной характер, то есть вестись относительно заданной конечной цели.

2. Планирование должно быть комплексным, то есть в сетевую модель должны включаться все работы,

выполнение которых необходимо для достижения конечной цели независимо от характера этих работ и ведомственной принадлежности их непосредственных исполнителей.

3. Определение конечной цели (или нескольких целей) должно быть предельно четким, то есть необходимо сформулировать, какой именно результат и в каком виде должен быть получен.

4. Должна быть предусмотрена четкая персональная ответственность за выполнение любой части проекта. За каждой отдельной частью должен быть закреплен только один ответственный исполнитель. Если на данной стадии ответственный исполнитель по какой-либо части проекта не может быть определен, то ответственность за соответствующую часть проекта возлагается на руководителя всей разработки.

5. Должны быть установлены единые формы представления информации независимо от характера этих работ и ведомственной принадлежности их исполнителей.

Ответственные исполнители на этапе сбора и анализа исходных данных строят первоначальные сетевые графики на закрепленные за ними элементами структурные схемы и определяют входящие в них события и работы, а также устанавливают показатели или оценки по каждой работе.

Ориентироваться в сложном комплексе работ не просто даже опытному специалисту. Чтобы облегчить составление сетевого графика, сложную систему расчленяют на более простые подсистемы и элементы. Например, если график составляется для уборочных или посевных работ в колхозе, то систему можно подразделить на следующие уровни: колхоз — бригада — звено — поле — культура. Графически такое расчленение приобретает вид разветвленного дерева. Высший уровень представлен в виде одного блока—вершины. Блоки последующих уровней соответствуют числу бригад в колхозе и т. д. Переход от высшего уровня к низшему определяет соподчиненность элементов системы. Каждый уровень древовидной схемы адресует составителей графика к конкретным исполнителям, несущим персональную ответственность за выполнением работ соответствующего уровня. Содержание и последовательность работ определяются группой СПУ с привлечением к этой работе ответственных исполнителей. Ввиду сложности сетевого планирования все специалисты, причастные к составлению графиков, должны пройти предварительную подготовку. Они должны ознакомиться с практикой составления первичных графиков, изучить порядок составления и представления информации о ходе работ и др.

Первичный сетевой график представляет собой детализированную модель элемента структурной схемы управляемого объекта, поэтому он должен строиться в полном соответствии с общими правилами построения сетевых графиков. При его составлении определяются состав, последовательность и взаимозависимость всех работ. Надо полно и точно сформулировать содержание каждой работы, ее результат и необходимые для ее начала исходные условия (формулировка входных и выходных событий). Нужно максимально использовать возможность параллельного выполнения работ, причем очень важно точно определить продолжительность работ в зависимости от типа СПУ.

Если работы, отражаемые в сетевом графике, являются типовыми, часто повторяющимися, для них может быть однозначно установлена нормативная продолжительность. Если речь идет о создании новых объектов или проведения комплекса экспериментальных работ, то здесь, как правило, невозможно предвидеть продолжительность выполнения. В таких случаях определяется минимальная и максимальная продолжительность работ.

Разработанные исходные данные представляются в службу СПУ высшего уровня руководства. При этом важнейшим принципом является единство форм представления исходных данных по всем работам и событиям сети независимо от характера этих работ и ведомственной принадлежности их исполнителей.

На основе исходных данных разрабатывается сводный сетевой график. Здесь проверяется правильность составления первичных сетевых графиков, «сшивается» сводный сетевой график, то есть объединяются все первичные сетевые графики в одну общую сеть, завершающее событие которой соответствует заданной конечной цели или конечным целям. Выверенные и закодированные исходные данные по событиям и работам сводного сетевого графика передаются на ЭВМ.

Опыт показывает, что при применении сетевого планирования сокращаются сроки выполнения всего комплекса работ и затраты ресурсов на их выполнение примерно на 12—15%. Общий выигрыш времени в результате рационального планирования работ дает эффект в виде прямой экономии затрат, высвобождения трудовых ресурсов, выпуска дополнительной продукции. Кроме этого, ощутимая экономия средств может быть достигнута в результате оптимизации сетевой модели, в частности за счет удлинения во времени некоторых некритических работ.

Экспериментальное планирование и управление с помощью сетевых графиков в полеводстве в период уборки урожая показали, что при этом значительно повышается роль руководства в организации, согласовании и координации усилий людей. В результате этого сокращаются сроки проведения сельскохозяйственных работ и повышается экономическая эффективность производства. У руководителей сельскохозяйственных предприятий с внедрением сетевых методов появляются новые возможности для более конкретного управления производством.

§ 5. Краткие выводы, методические советы и задания

В настоящее время широким фронтом ведутся работы по созданию автоматизированных систем управления (АСУ) в различных отраслях народного хозяйства. Одним из совершенных математических средств управления производством является сетевое планирование и управление (СПУ). Диспетчерская служба, технические средства сбора и передачи информации и ЭВМ нового типа «Ряд», которыми будут оснащены АСУ, позволят еще более укрепить роль СПУ в автоматизированных системах управления.

Разумеется, внедрение методов СПУ потребует повышения знаний исполнителей. Сетевой график не заменяет руководителя, а является лишь инструментом для принятия более обоснованных решений, и для того, чтобы этот инструмент был надежным и приводил к достижению намеченных целей, надо тщательно изучить общие принципы построения графиков и овладеть способами их применения на практике.

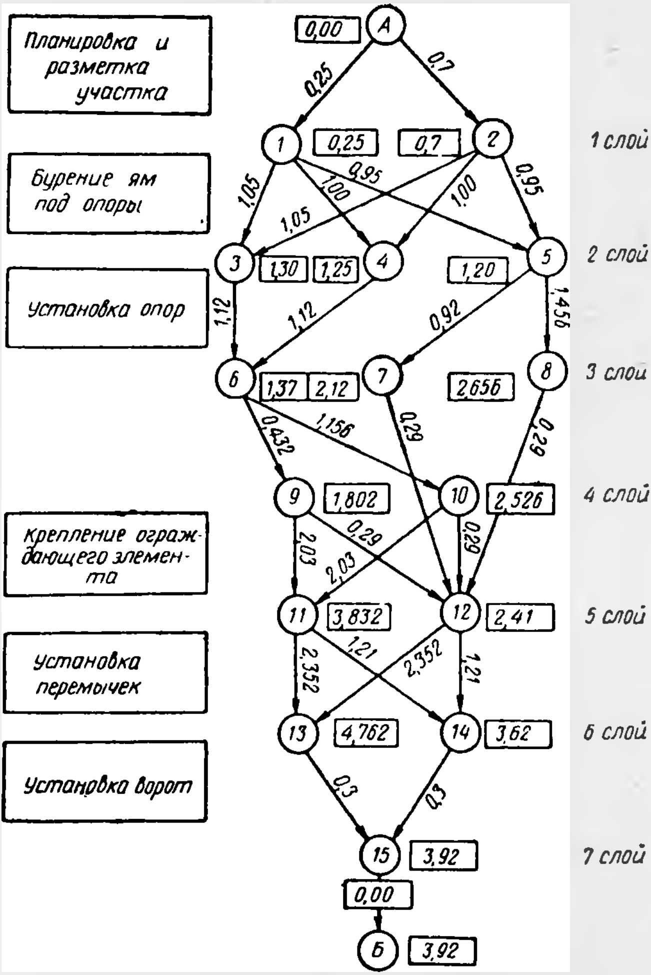


Рис. 9. Расчетный сетевой график технологии огораживания пастбищ для овец.

При изучении данной главы следует уяснить, что методы сетевого планирования возникли как средство управления сложными разработками, требующими строгой согласованности действий исполнителей и использования ресурсов. С помощью этих методов открывается возможность выявления «узких мест» в производственном процессе.

Для закрепления материала ответьте на следующие вопросы.

Раскройте содержание и сущность сетевого планирования.

Охарактеризуйте область применения сетевых методов в сфере экономики.

Опишите основные требования, которым должен удовлетворять сетевой график.

Раскройте содержание, метод определения и значение критического пути в моделях сетевого планирования.

Дайте характеристику функционирования системы СПУ.

Задание 1. *Задача 1.* Даны работы 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Работу 4 можно начать после окончания работ 1 и 2; работу 5 — после окончания работ 2 и 3. Постройте сетевой график.

Задача 2. Даны работы 1, 2, 3, 4 и 5. Работы 1 и 2 начинаются после завершения одних и тех же работ; работа 4 начинается после окончания работ 1, 2 и 3; работа 5 может начаться после окончания работ 2 и 3. Постройте сетевой график.

Задача 3. Даны работы 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Начало работы 4 зависит от окончания работ 1 и 2; начало работы 5 — от окончания работы 2; начало работы 6 — от окончания работ 2 и 3. Постройте сетевой график.

Задание 2. *Задача 1.* На рисунке 9 приведен расчетный график технологии огораживания пастбищ для овец. Найдите критический путь на этом графике и покажите, где ошибка в расчетах.

Оптимальный путь из точки А в точку Б можно легко восстановить по цифрам, стоящим возле каждой вершины.

Рекомендуется рассуждения вести от конечной вершины, к которой сходятся два ребра.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Геннадий Иванович Новиков,
Константин Васильевич Колузанов

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

Редактор Ю. А. Наумов.
Художественный редактор Н. М. Коровина.
Технический редактор З. П. Околелова.
Корректор О. А. Макарова.

Сдано в набор 14/X 1974 г. Подписано к печати 25/II 1975 г. Т-05501. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 3. Усл.-печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 15,36. Изд. № 227. Тираж 12 000 экз. Заказ № 2009. Цена 67 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Колос», 103716, ГСП, Москва, К-31, ул. Дзержинского, д. 1/19.

Типография им. Смирнова Смоленского облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2.